



# Curso Académico 2025-26

## Geometría Diferencial de Curvas y Superficies

### Guía Docente

#### ASIGNATURA

**Nombre de asignatura:** Geometría Diferencial de Curvas y Superficies (4193212)  
**Créditos:** 6  
**Modalidad:** Presencial

#### PLAN/ES DONDE SE IMPARTE

<b>Plan:</b> Grado en Matemáticas (Plan 2019) <b>Curso:</b> 3 <b>Carácter:</b> Obligatoria <b>Duración:</b> Segundo Cuatrimestre <b>Idioma/s en que se imparte:</b> Español <b>Módulo/Materia:</b> 06. Geometría y Topología/Geometría diferencial de curvas y superficies
<b>Plan:</b> Doble Grado en Economía y Matemáticas <b>Curso:</b> 3 <b>Carácter:</b> Obligatoria <b>Duración:</b> Segundo Cuatrimestre <b>Idioma/s en que se imparte:</b> Español <b>Módulo/Materia:</b> Asignaturas título/
<b>Plan:</b> Doble Grado en Economía y Matemáticas <b>Curso:</b> 3 <b>Carácter:</b> Obligatoria <b>Duración:</b> Segundo Cuatrimestre <b>Idioma/s en que se imparte:</b> Español <b>Módulo/Materia:</b> Asignaturas título/

#### PROFESOR/A RESPONSABLE O COORDINADOR/A

Profesor/a	Departamento	Correo electrónico
Kelmer Alves, Filipe	Matemáticas	

#### PROFESORADO

Profesor/a	Departamento	Correo electrónico
Kelmer Alves, Filipe	Matemáticas	

#### DATOS BÁSICOS

<b>Modalidad</b>
Presencial
<b>ELEMENTOS DE INTERÉS PARA EL APRENDIZAJE DE LA ASIGNATURA</b>
<b>Justificación de los contenidos</b>
<p>La Geometría Diferencial es importante en muchos campos de la Matemáticas y de la Física, así como en muchas otras disciplinas como arquitectura, ingenierías o computación.</p> <p>En la primera parte del curso presentamos la teoría de curvas regulares en el plano y en el espacio, destacando la importancia del uso de parametrizaciones y del sistema de referencia móvil o triedro de Frenet. Estudiaremos dos funciones asociadas a una curva, la curvatura y la torsión, que la determinan salvo movimientos directos, gracias al teorema fundamental de la teoría local de curvas. Daremos versiones implícitas de todo en la medida de lo posible.</p> <p>En la segunda parte estudiaremos superficies regulares en el espacio. Estudiaremos la primera y segunda formas fundamentales, el operador de Weingarten y la curvatura de Gauss. Probaremos el teorema egregio de Gauss que dice que la curvatura de Gauss solo depende de la primera forma fundamental, es decir, que es intrínseca a la superficie, y por tanto invariante bajo isometrías locales, y el teorema fundamental de la teoría local de superficies (Bonnet). Estudiaremos algunos ejemplos de superficies: de revolución, cuádricas, regladas, tubos y minimales. Calcularemos líneas asintóticas, de curvatura y geodésicas, longitudes de curvas, ángulos entre curvas y áreas de regiones compactas contenidas en la superficie.</p>
<b>Materia con la que se relaciona en el Plan de Estudios</b>
<p>Se relaciona con las asignaturas: "Álgebra lineal", "Geometría elemental", "Cálculo diferencial e integral", "Topología", "Ecuaciones diferenciales", "Análisis Complejo", "Introducción a la topología algebraica", "Geometría global de superficies"</p>
<b>Conocimientos necesarios para abordar la asignatura</b>
<p>Conocimientos previos necesarios:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Álgebra lineal: espacios vectoriales, espacios afines, espacios euclídeos.</li> <li>2. Cálculo diferencial e integral de una y de varias variables.</li> <li>3. Topología general.</li> <li>4. Álgebra: teoría de grupos, formas bilineales y cuadráticas</li> </ol>
<b>Requisitos previos recogidos en la memoria de la Titulación</b>
Ninguno
<b>RESULTADOS DEL PROCESO DE FORMACIÓN Y DE APRENDIZAJE</b>
<b>Competencias.</b>
<p>BÁSICAS Y GENERALES:</p> <p>CB1 - Que los estudiantes hayan demostrado poseer y comprender conocimientos en un área de estudio que parte de la base de la educación secundaria general, y se suele encontrar a un nivel que, si bien se apoya en libros de texto avanzados, incluye también algunos aspectos que implican conocimientos procedentes de la vanguardia de su campo de estudio.</p>

CB3 - Que los estudiantes tengan la capacidad de reunir e interpretar datos relevantes (normalmente dentro de su área de estudio) para emitir juicios que incluyan una reflexión sobre temas relevantes de índole social, científica o ética.

TRANSVERSALES:

UAL1 - Adquirir conocimientos básicos de la profesión.

ESPECÍFICAS:

CE03 - Desarrollar en profundidad la capacidad para realizar analogías.

CE04 - Desarrollar en profundidad la capacidad de abstracción. CE06 - Desarrollar en profundidad la capacidad de análisis.

### **Conocimientos o contenidos**

Conocer las propiedades locales de las curvas y superficies en el espacio euclídeo tridimensional.

Identificar los elementos diferenciales fundamentales de una curva, como el Triedro de Frenet las nociones de curvatura.

Identificar los elementos diferenciales fundamentales de una superficie, como el plano tangente, la primera y segunda formas fundamentales, aplicación normal de Gauss y curvatura de Gauss.

Comprender el significado y la interpretación geométrica de los invariantes locales: curvatura y torsión de curvas, curvatura de Gauss de superficies (Teorema Egregium de Gauss), así como los teoremas fundamentales de la geometría diferencial local (Teorema Fundamental de las Curvas y Teorema de Bonnet).

### **Habilidades o destrezas.**

Aplicar técnicas locales basadas en parametrizaciones para el estudio de curvas y superficies en el espacio euclídeo.

Calcular los elementos diferenciales asociados a curvas y superficies, como el triedro de Frenet, el plano tangente y la aplicación normal de Gauss.

Determinar cuantitativamente la curvatura, torsión y longitud de curvas, así como las curvaturas de Gauss y media de una superficie.

Analizar superficies a partir de sus formas fundamentales y calcular curvaturas principales, líneas de curvatura y geodésicas.

Resolver problemas geométricos que involucren difeomorfismos locales entre superficies, así como aquellos relacionados con el cálculo de áreas, ángulos entre curvas o entre superficies.

## PLANIFICACIÓN

### Temario

1. Curvas en el plano y en el espacio: parametrizadas, implícitas y regulares. Longitud de arco. Referencias de Frenet y curvaturas. Fórmulas implícitas. Propiedades globales de curvas planas.
2. Superficies regulares en el espacio. El plano tangente. Diferencial de una aplicación. Primera forma fundamental. Orientación de superficies. Definición geométrica de área.
3. La segunda forma fundamental. Curvaturas principales, de Gauss y media. Teorema Egregio de Gauss. Fórmulas implícitas. Superficies de curvatura constante, regladas y minimales.

### Actividades Formativas y Metodologías Docentes

**Metodologías docentes:** Según consta en la memoria de verificación del grado: MD05 Clase magistral participativa. MD1 Aprendizaje basado en problemas.

**Actividades formativas:** Según consta en la memoria de verificación del grado: AF07 Resolución de problemas. AF15 Trabajo autónomo del alumno. AF13 Clases teóricas y prácticas.

**Plan de Contingencia:** Si hay medidas restrictivas decididas por las autoridades, las actividades del Grupo Docente se impartirán mediante la plataforma virtual, pero los Grupos de Trabajo seguirán presenciales, conforme a la planificación establecida. Si hay medidas aún más restrictivas, también los Grupos de Trabajo se realizarían mediante la plataforma virtual. En ambos casos, se reservan todos los derechos sobre la imagen y voz del profesor.

### Actividades de Innovación Docente

#### Diversidad Funcional

El estudiantado con discapacidad o necesidades específicas de apoyo educativo puede dirigirse a la Unidad de Inclusión y Atención a la Diversidad para recibir la orientación y el asesoramiento necesarios, facilitando así un mejor aprovechamiento de su proceso formativo. Asimismo, podrán solicitar las adaptaciones curriculares necesarias para garantizar la igualdad de oportunidades en su desarrollo académico. La información relativa a este alumnado se trata con estricta confidencialidad, en cumplimiento con la Ley Orgánica de Protección de Datos (LOPD). El equipo docente responsable de esta guía aplicará las adaptaciones aprobadas por la Unidad de Inclusión y Atención a la Diversidad, tras su notificación al Centro y a la coordinación del curso.

## PROCEDIMIENTO DE EVALUACIÓN

### Pruebas orales/escritas Sí

### Resolución de problemas Sí

### Criterios

1. Evaluación Continua (**50% de la nota final**). Actividades y ejercicios de clase (SE01)/ Pruebas intermedias (SE07).

Competencias evaluadas: CB3, CE03 y UAL1.

2. Convocatoria Ordinaria - Junio 2025- (**50% de la nota final**). Examen final teórico (SE06).

Competencias evaluadas: CB1, CE04, CE06 y UAL1.

3. Convocatoria Extraordinaria -Julio 2025- (**100% de la nota**). Examen único final (SE06).

Competencias evaluadas: CB1, CB3, CE03, CE04, CE06 y UAL1.

Nota: Se tomará la mayor de estas dos opciones;

- a) Examen único final, o
- b) Promedio evaluación continua (50%) + examen ordinario (50%).

4. Evaluación Única Final. Examen global escrito (**100%**).

Competencias evaluadas: CB1, CB3, CE03, CE04, CE06 y UAL1.

Plan de Contingencia: En los casos en los que las autoridades decidan la no presencialidad de las pruebas de evaluación en las convocatorias ordinaria o extraordinaria, la evaluación se realizará por escrito mediante la plataforma virtual. En la evaluación única final, el examen podrá ser escrito u oral, mediante la plataforma virtual.

## RECURSOS

### Bibliografía básica.

**do Carmo, Manfredo P.** (1995) Geometría diferencial de curvas y superficies. Alianza.

**Montiel, S., & Ros, A.** (2009). *Curves and Surfaces* (2nd ed.). American Mathematical Society.

**O'Neill, B.** (2006). *Elementary Differential Geometry* (2nd ed.). Academic Press.

**Pressley, A.** (2010). *Elementary Differential Geometry* (2nd ed.). Springer.

### Bibliografía complementaria.

**Gray, A., et al.** (2006). *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica* (3rd ed.). CRC Press.

**Kühnel, W.** (2015). *Differential Geometry: Curves - Surfaces - Manifolds* (3rd ed.). American Mathematical Society.

**Spivak, M.** (1999). *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry* (Vol. 1, 3rd ed.). Publish or Perish.

### Otros recursos.

Recursos en línea:

**Desmos Graphing Calculator** (2023). *Herramienta interactiva para visualización de curvas y superficies.*

Disponible en: <https://www.desmos.com/>

**Weisstein, E. W.** (n.d.). *Differential Geometry*. MathWorld.

Disponible en: <https://mathworld.wolfram.com/>

**MIT OpenCourseWare.** (2009). *Differential Geometry*.

Disponible en: <https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/>