

Tema 1.- Teoría de Campos

1. Dados los vectores $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Determinar: a) El ángulo θ formado por ellos; b) El vector unitario que es perpendicular al vector \mathbf{a} y está contenido en el plano XY.

Sol: a) $\alpha = 27^\circ 16'$; b) $\mathbf{u} = -0.447\mathbf{i} + 0.894\mathbf{j}$

2. Dados los vectores: $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; $\mathbf{b} = x\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Determinar x,y,z para que estos vectores sean mutuamente perpendiculares. *Sol:* $x = 14.5$; $y = -9$; $z = -25.5$

3. ¿En qué condiciones el módulo del producto vectorial es igual al producto escalar?

Sol: $\alpha = 45^\circ$

4. Dado el vector \mathbf{a} que pasa por el punto A y dado el punto P, calcular el producto vectorial $\mathbf{PA} \times \mathbf{a}$ y el producto mixto $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{PA} \times \mathbf{a})$. Siendo el vector $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ y el \mathbf{c} un vector unitario de cosenos directores $\alpha = 0.5$, $\beta = -0.707$ y $\gamma = 0.5$, los puntos A y P tienen las coordenadas (3,1,1) y (1,-1,2), respectivamente. *Sol:* $\mathbf{PA} \times \mathbf{a} = 7\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$; $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{PA} \times \mathbf{a}) = 7.57$

5. Dado un vector \mathbf{a} de módulo unidad cuya recta de acción pasa por los puntos A y B. Calcular el producto vectorial de \mathbf{a} con el vector de posición del punto A y con el vector de posición del punto B. Los puntos A y B tienen las coordenadas (3,0,2) y (0,6,4), respectivamente. *Sol:* $\mathbf{a} \times \mathbf{A} = 1.714\mathbf{i} + 1.714\mathbf{j} - 2.571\mathbf{k}$; $\mathbf{a} \times \mathbf{B} = 1.714\mathbf{i} + 1.714\mathbf{j} - 2.571\mathbf{k}$

6. Dado el vector $\mathbf{a} = A(\cos(\omega t)\mathbf{i} + \sin(\omega t)\mathbf{j})$ siendo A y ω constantes, y siendo t la variable escalar independiente. a) Hallar su módulo y la derivada de éste; b) Hallar $d\mathbf{a}/dt$ y $|d\mathbf{a}/dt|$. Demostrar que \mathbf{a} y $d\mathbf{a}/dt$ son perpendiculares. *Sol:* a) A , 0; b) $d\mathbf{a}/dt = -\omega A \sin(\omega t)\mathbf{i} + \omega A \cos(\omega t)\mathbf{j}$; $|d\mathbf{a}/dt| = \omega A$

7. Sea el campo escalar $f(x,y,z) = x^3 + 2yx^2 + y^3 + z^2(x+y)$. Hallar $\mathbf{grad}(f)$ en el punto (1,1,1). *Sol:* (8,6,4)

8. Sea el campo vectorial $\mathbf{A} = r^2\mathbf{r}$ donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Demostrar que $\text{div } \mathbf{A} = 5r^2$.

9. Demostrar que el campo vectorial $\mathbf{A} = (3x^2y + zy^2)\mathbf{i} + (x^3 + 2xyz)\mathbf{j} + y^2x\mathbf{k}$ es irrotacional y encontrar el potencial del que deriva. *Sol:* $\phi = x^3y + xy^2z + C$

10. La función potencial de un campo vectorial viene dada por $z^2x - 2y - x^3/3 + 5$. a) Calcular el campo vectorial; b) Comprobar que es irrotacional. *Sol:* a) $\mathbf{A} = (z^2 - x^2)\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$;

11. Dado el campo vectorial $\mathbf{A} = x^2y\mathbf{i} + (xz - y^2)\mathbf{j} + 3xz^2\mathbf{k}$. Calcular todas las derivadas parciales de primer orden respecto de las variables x,y,z, así como $d\mathbf{A}$.

Sol: $dA_x = 2xydx + x^2dy$; $dA_y = zdx - 2ydy + xdz$; $dA_z = 3z^2dx + 6xzdz$

12. Calcular la derivada direccional de la función $f(x,y,z) = 2xz - y^2$ en la dirección y sentido dado por el vector $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ en el punto (1,3,2). Determinar en dicho punto la dirección del máximo crecimiento de f, así como el valor de dicho crecimiento por unidad de longitud en la citada dirección. *Sol:* 0; (2,-3,1); $\sqrt{56}$

