Tema 7. Circuitos de corriente continua.

7.1 Intensidad y densidad de corriente. Ecuación de continuidad.
7.2 Conductividad eléctrica. Ley de Ohm.
    7.2.1 Asociación de resistencias
7.3 Energía de la corriente eléctrica. Ley de Joule.
7.4 Fuerza electromotriz
    7.4.1 Asociación de generadores
7.5 Condensadores
    7.5.1 Asociación de condensadores
    7.5.2 Energía almacenada en un condensador cargado
7.6 Carga y descarga de un condensador
7.7 Reglas de Kirchhoff
7.8 Análisis de circuitos
7.9 Bibliografía
7.10 Problemas

Nota: El contenido de estos apuntes pretende ser un resumen de la materia desarrollada en el curso. Por ello, el alumno debe de completarlo con las explicaciones y discusiones llevadas a cabo en clase y con la bibliografía recomendada.

7.1 Intensidad y densidad de corriente. Ecuación de continuidad.

Se define corriente eléctrica como un flujo de cargas positivas y/o negativas, cuyo sentido coincide con el sentido del flujo de las cargas positivas.

En un conductor los portadores de carga son e^-, por lo que se toma como sentido de la corriente el sentido contrario al de los portadores (criterio internacional).

Sea una superficie A atravesada por una carga ΔQ. La corriente eléctrica que atraviesa dicha superficie viene definida por la intensidad de corriente I, la cual se define como el cociente entre la carga neta que atraviesa dicha superficie y el tiempo empleado:

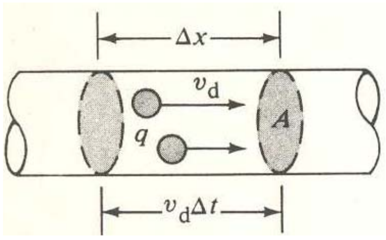
$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad (1)$$

si Q es función del tiempo, es decir, Q = Q(t), la intensidad también depende del tiempo, por lo que definimos:

$$I = \frac{dQ}{dt} \qquad (2)$$

La unidad de la intensidad de corriente en el sistema internacional es el Amperio (A)

Consideremos un volumen de sección A y longitud Δx. Si n es el número de portadores de carga por unidad de volumen, el número de portadores de carga en el volumen anterior es $nA\Delta x$, siendo la carga



$$\Delta Q = nA\Delta xq \qquad (3)$$

donde q representa la carga de cada portador.

Sustituyendo (3) en (1) resulta:

$$I = nAqv_D \qquad (4)$$

v_D se denomina velocidad de derivación o velocidad media de los portadores de carga, la cual no coincide con la velocidad libre de los portadores, debido a que en su movimiento, las cargas chocan con los átomos del material, produciéndose una perdida de energía cinética que se transforma en calor.

Si suponemos que por cada átomo hay un portador, $n = \dfrac{N\rho}{M}$

siendo N el número de Avogadro, ρ la densidad y M el peso molecular.

Sustituyendo en (4):

$$v_D = \frac{M\,I}{N\rho A\,q} \qquad (5)$$

Los e^- que constituyen la corriente eléctrica en el interior de un conductor se mueven por la acción de un campo eléctrico $\vec{E}$, lo cual es posible ya que la situación del conductor no es de equilibrio electrostático.

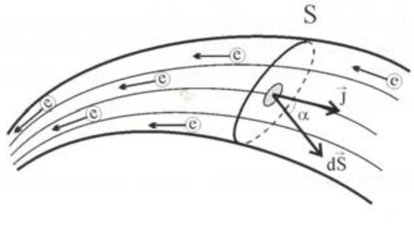
$$\vec{F} = q\,\vec{E} = m\,\vec{a} \qquad (6)$$

$$\langle\vec{v}\rangle = \vec{v}_D = \langle\vec{v}_0 + \vec{a}t\rangle = \langle\vec{v}_0\rangle + \langle\vec{a}t\rangle = \vec{a}\langle t\rangle = \vec{a}\tau = \frac{q\tau}{m}\vec{E} \qquad (7)$$

donde τ representa el tiempo medio entre colisiones.

Densidad de corriente

La densidad de corriente $\vec{J}$ se define como la intensidad de corriente por unidad de área.



$$\vec{J} = \frac{dI}{d\vec{A}} \qquad (8)$$

Considerando la ecuación (4)

$$\vec{J} = nq\vec{v}_D \tag{9}$$

La densidad de corriente en el conductor se origina por la presencia de un campo eléctrico $\vec{E}$ cuando se aplica una d.d.p. en los extremos del conductor. Si la d.d.p. es cte, también lo es $\vec{E}$ y por tanto $\vec{J}$, cumpliéndose:

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \tag{10}$$

siendo σ la conductividad del conductor, la cual no depende del campo $\vec{E}$ y es una constante que depende de la naturaleza del material.

$$\sigma = \frac{nq^2\tau}{m} \tag{11}$$

Ecuación de continuidad

En todo fenómeno eléctrico se cumple el principio de conservación de la carga. Por tanto, si de un volumen V limitado por una superficie cerrada S emanan cargas, la variación creciente de la carga en el medio exterior ha de ser igual a la variación decreciente de la carga en el medio interior a la superficie.

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV \tag{12}$$

Aplicando el teorema de Gauss:

$$\int_V \left(\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} \right) dV = 0 \;\Rightarrow\; \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \tag{13}$$

De la ecuación de continuidad es posible determinar la condición de contorno para la densidad de corriente.

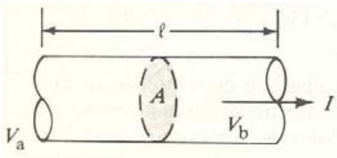
Aplicaciones:

1.- La cantidad de carga que pasa a través de una superficie cuya área es 1 cm^2 varía con el tiempo según la expresión $Q(t) = 3t^2-4t+2$. a) ¿Cuál es la corriente instantánea a través de la superficie en el instante t = 0,5s? b) ¿Cuál es el valor de la densidad de corriente?

2.- En un momento dado, cierto sistema tiene una densidad de corriente dada por $\vec{J} = A\left(x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}\right)$ siendo A una constante positiva. Determine: a) Cuales son las unidades de A; b) Cual es en ese instante la razón del cambio de la densidad de carga en el punto P(2,-1,4)

7.2 Conductividad eléctrica. Ley de Ohm.

Los materiales que cumplen la relación $\bar{J} = \sigma\vec{E}$ se dice que siguen la ley de Ohm, es decir, se denominan materiales óhmicos. Para dichos materiales podemos relacionar la diferencia de potencial (ΔV) aplicada en los extremos del conductor con la intensidad de corriente I producida por ella:



$$\Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b E dx = El = \frac{J}{\sigma} l = \frac{I}{\sigma A} l \qquad (14)$$

$R = \dfrac{l}{\sigma A}$ representa la resistencia del conductor y se mide en ohmios (Ω), luego

$$\Delta V = IR \qquad (15)$$

La resistividad del conductor es la inversa de la conductividad $\rho = \dfrac{1}{\sigma}$. En general ρ es muy baja, por lo que σ es muy alta. Para el cobre a 20ºC, $\rho = 1.7 \times 10^{-8}$ ohmio.m.

La resistividad de un conductor varía con la temperatura, aumentando ρ cuando aumenta T:

$$\rho(T) = \rho_0 [1 + \alpha (T - T_0)] \qquad (16)$$

ρ_0 es la resistividad a una temperatura de referencia T_0
α representa el coeficiente de temperatura de resistividad

$$\alpha = \frac{\Delta \rho}{\Delta T} \frac{1}{\rho_0} \qquad (17)$$

Aunque el crecimiento de ρ con la temperatura es lineal, no mantiene este comportamiento a temperaturas bajas, siendo en dicho caso de tipo exponencial.

Para ciertos metales, la resistividad se hace cero por debajo de un valor de temperatura ($\leq$25ºK) denominado temperatura crítica. Dichos metales se denominan superconductores. Una de las características más notables de los superconductores es que una vez que se ha originado una corriente eléctrica en su interior, ésta se mantiene aunque la d.d.p. sea cero, ya que R =0. (Ver seminario de exposición de trabajos)

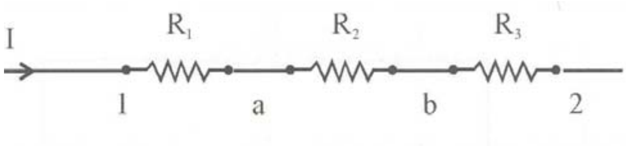
Como: $$R(T) = \rho(T) \frac{l}{A} = \frac{l}{A} \rho_0 [1 + \alpha (T - T_0)] = R_0 [1 + \alpha (T - T_0)] \qquad (18)$$

siendo R_0 la resistencia del conductor a la temperatura de referencia T_0.

7.2.1 Asociación de resistencias

Dado un sistema formado por n resistencias R_i, siempre es posible encontrar una resistencia única que equivalga a las que forman la asociación, que recibe el nombre de resistencia equivalente R_e.

7.2.1.1 En serie

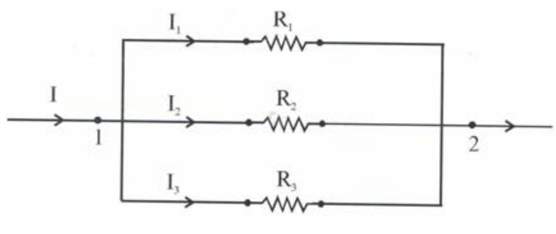


$$I_s = I_i = cte \tag{19}$$

$$\Delta V_s = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \tag{20}$$

$$R_e = \sum_{i=1}^{n} R_i \tag{21}$$

7.2.1.2 En paralelo



$$I_s = \sum_{i=1}^{n} I_i \tag{22}$$

$$\Delta V_s = \Delta V_i = cte \tag{23}$$

$$\frac{1}{R_e} = \sum_{i=1}^{n} R_i \tag{24}$$

7.2.1.3 Mixta

Es una combinación de las asociaciones serie-paralelo.

Aplicaciones:

1.- Un hilo conductor de sección circular tiene un diámetro de 1mm, una longitud de 1m y una resistencia de 10Ω. Si la densidad de los electrones es de 10^{29} e^-/m^3, estime el tiempo medio requerido para que un electrón recorra el conductor cuando se conecta a los terminales del mismo una diferencia de potencial de 1V.
2.- Determine la resistividad del cobre a partir de los datos siguientes: una d.d.p. de 1,2V produce una corriente de 1,8A en un alambre de cobre cuya longitud es de 100m y 0,18cm de diámetro.

7.3 Energía de la corriente eléctrica. Ley de Joule.

Consideremos un segmento de conductor cilíndrico de longitud l y sección S. Si aplicamos una diferencia de potencial en sus extremos, tal que $V_A > V_B$, el efecto es como si la carga Δq entrase al potencial V_A y saliera al potencial V_B.

El cambio en la energía potencial es:

$$\Delta U = U(B) - U(A) = \Delta\ (V_B - V_A) \tag{25}$$

y la perdida de energía en el conductor es:

$$-\Delta U = U(A) - U(B) = \Delta q\ (V_A - V_B) = \Delta q\ V \tag{26}$$

La rapidez con que se pierde energía es la potencia disipada en el conductor:

$$P = -\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta q}{\Delta t} V = IV \quad (27)$$

Como $$P = \frac{dW}{dt} \Rightarrow W = \int_0^t P dt = \int_0^t IV dt = IVt \quad (28)$$

Siendo el calor desprendido en la resistencia (ley de Joule):

$$Q(t) = 0,24\ I^2 Rt \quad (29)$$

Generalización de la ley de Joule

El trabajo realizado por la fuerza que actúa sobre una carga q en el interior de un conductor cuando esta se desplaza una distancia $d\vec{r}$, al aplicar una d.d.p. $\Delta V = V_A - V_B$ en los extremos es:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = q\vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (30)$$

Para un volumen dv que contiene n portadores de carga por unidad de volumen, el trabajo realizado para trasladar las cargas viene definido por:

$$dW = q\vec{E} \cdot d\vec{r}\ ndv = q\vec{E} \cdot \vec{v}dt\ ndv = J \cdot E\ dt\ dv \quad (31)$$

La potencia transformada en calor en el volumen V es:

$$dP = \frac{dW}{dt} = \vec{J} \cdot \vec{E}\ dv \Rightarrow P = \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{E}\ dv \quad (32)$$

7.4 Fuerza electromotriz

Para mantener una corriente eléctrica en el interior de un conductor es necesario disponer de un dispositivo capaz de suministrar energía eléctrica.

Una batería o generador es cualquier dispositivo capaz de aumentar la energía potencial de las cargas que circulan por el conductor. Si el campo eléctrico generado por la batería en el interior del conductor es $\vec{E}$, el trabajo para trasladar la una carga q dentro del conductor viene definido por la ecuación (30), siendo el trabajo por unidad de carga la fuerza electromotriz ε suministrada por el generador:

$$\varepsilon = \frac{W}{q} = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (33)$$

Como $\vec{E}$ es conservativo, $\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}}$

$$\varepsilon = \int_l E \cdot dr = \int_l -\frac{\partial V}{\partial r} dr = -\int_A^B \partial V = V(A) - V(B) \quad (34)$$

La fuerza electromotriz ε es igual a la diferencia de potencial entre los extremos del conductor si la resistencia interna del generador es 0.

Si la trayectoria es cerrada V(A) = V(B) por lo que $\varepsilon = 0$, lo que implica que no se puede mantener una corriente eléctrica en un circuito cerrado, por lo que es necesario suministrar energía a las cargas.

Si conectamos un generador de fuerza electromotriz ε y resistencia interna $r \neq 0$ en serie con una resistencia R, la diferencia de potencial en los extremos del generador es:

$$V(A) - V(B) = \varepsilon - Ir = IR \tag{35}$$

Siendo la intensidad de corriente que circula:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} \tag{36}$$

La potencia suministrada por la batería se transforma en potencia disipada en forma de calor en la resistencia externa y en la resistencia del generador:

$$I\varepsilon = I^2R + I^2r \tag{37}$$

Si introducimos en el circuito un motor de fuerza contraelectromotriz ε' y resistencia interna r' en serie con los elementos anteriores

$$\varepsilon = Ir + IR + \varepsilon' + Ir' \tag{38}$$

luego:

$$I = \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{r + R + r'} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{n} R_i} \tag{39}$$

7.4.1 Asociación de generadores

7.4.1.1 En serie

Consideremos n generadores de fuerzas electromotriz ε_i y resistencias internas r_i conectados en serie a una resistencia R.

$$\varepsilon_s = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \tag{40}$$

$$I_s = \frac{\varepsilon_s}{R + \sum_{i=1}^{n} r_i} \tag{41}$$

Si los generadores tienen las misma características: $\varepsilon_i = \varepsilon = cte$; $r_i = r = cte$

$$\varepsilon_s = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = n\,\varepsilon \qquad I_s = \frac{n\varepsilon}{R + nr} \tag{42}$$

Si $R >> r_i$ la intensidad aumenta en n veces la intensidad que produce un generador.

$$R + nr \approx R \qquad I_s = \frac{n\varepsilon}{R} = nI_i$$

Si R << nr la asociación produce la misma corriente que uno solo de los generadores.

$$R + nr \approx nr \qquad I_s = \frac{n\varepsilon}{nr} = I_i$$

La asociación en serie se emplea para aumentar la intensidad de corriente en circuitos de gran resistencia externa.

7.4.1.2 En paralelo

Consideremos n generadores de fuerzas electromotriz ε_i y resistencias internas r_i conectados en paralelo a una resistencia R.

La aplicación de las reglas de Kirchhoff (se verán más adelante) nos permite determinar las intensidades I_i que circulan por cada rama del circuito.

Si los generadores tienen las misma características: $\varepsilon_i = \varepsilon = cte$; $r_i = r = cte$

$$I_s = \frac{\varepsilon}{R + \frac{r}{n}} \qquad (43)$$

Si $R >> \frac{r}{n}$ la asociación se comporta como un solo generador:

$$R + \frac{r}{n} \approx R \qquad \Rightarrow \qquad I = \frac{\varepsilon}{R}$$

Si $R << \frac{r}{n}$ la asociación es útil y la intensidad que genera es n veces la que produce uno de los asociados.

$$R + \frac{r}{n} \approx \frac{r}{n} \qquad \Rightarrow \qquad I = \frac{n\varepsilon}{r} = nI_i$$

La asociación en paralelo se emplea para multiplicar la intensidad de corriente en circuitos de pequeña resistencia externa.

Aplicaciones:

1.- Dos baterías de características $\varepsilon_1 = 20V$, $r_1 = 0{,}5\Omega$ y $\varepsilon_2 = 8V$, $r_2 = 0{,}2\Omega$ respectivamente, se conectan en serie pero con polaridad cambiada con una resistencia $R = 5{,}3\Omega$. Determine: a) Intensidad de corriente que circula; b) Potencia consumida por la batería 1; c) Energía suministrada por la batería 2 en t = 2 s; d) Potencia útil en la batería 1.
2.- Dos resistencias de 2 y 3Ω respectivamente, están montadas en paralelo y unidas mediante un conductor lineal de cobre de 23,5m de longitud y sección $0{,}1mm^2$ a un generador de corriente continua que suministra una potencia de 30W. sabiendo que el tiempo medio de colisión de los portadores de carga en el conductor es de $2{,}53x10^{14}s$ y que se desprende 19,2 calorías en 5s. Determine: a) La potencia disipada en la resistencia de 2Ω; b) El calor liberado en el generador en 10s.

7.5 Condensadores

Un condensador es básicamente un dispositivo capaz de almacenar carga y por tanto energía eléctrica. Está formado por 2 conductores igualmente cargados pero de sisno contrario separados entre sí por un medio dieléctrico, el cual es un material aislante con propiedades eléctricas particulares.

La propiedad de almacenar carga el condensador depende de la geometría de las armaduras y de las propiedades del medio entre las mismas.

La capacidad de un condensador para almacenar carga se denomina capacitancia C y se define como el cociente entre la carga almacenada por uno de los conductores y la diferencia de potencial entre ellos.

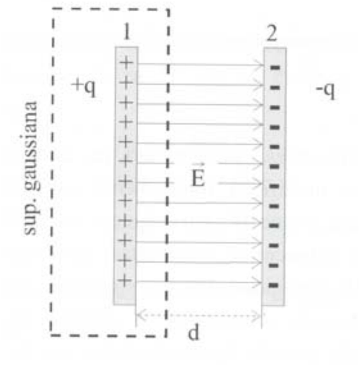
$$C = \frac{Q}{\Delta V} \tag{44}$$

C es una constante positiva y su unidad en el S.I. es el faradio (F).

Casos particulares

Condensador plano-paralelo

Aplicando el teorema de Gauss, el campo eléctrico entre las armaduras del condensador viene definido por:



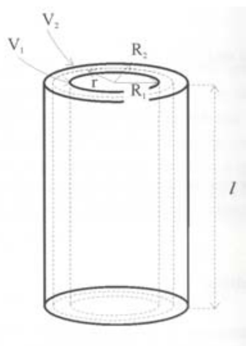
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$

$$\Delta V = E\,d = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} d$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \tag{45}$$

La capacidad es proporcional al área de las placas e inversamente proporcional a la distancia entre las placas.

Condensador cilíndrico



El campo eléctrico entre las armaduras es:

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l r}$$

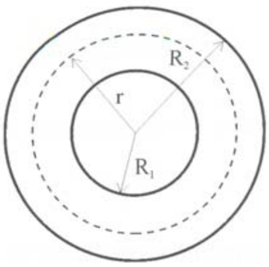
$$\Delta V = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(R_2 / R_1\right)} \quad (46)$$

Condensador esférico

Está formado por dos conductores esféricos concéntricos como se indica en la figura.

Las líneas de campo son radiales y aplicando el teorema de Gauss a la superficie gaussiana de radio r, resulta



$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\Delta V = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (47)$$

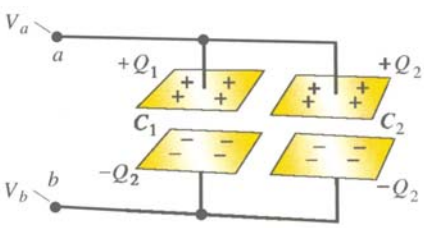
7.5.1 Asociación de condensadores

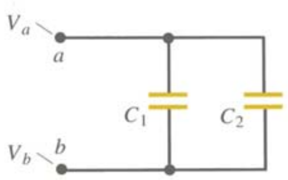
En la práctica es muy frecuente, en vez de un condensador aislado, una asociación de ellos con objeto de tener una capacidad superior o inferior a aquellas de que se dispone.

Toda asociación de condensadores se puede sustituir por un condensador equivalente, cuya capacidad C_e depende del tipo de asociación.

Hay 3 tipos:

7.5.1.1 Paralelo





$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V = V_a - V_b$

$Q_s = Q_1 + Q_2$

$C_e = C_1 + C_2$

Generalizando para una asociación con n condensadores en paralelo

$$\Delta V = \Delta V_i = Cte$$

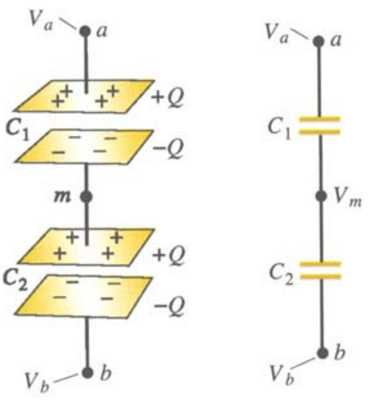
$$Q_s = \sum_{i=1}^{n} Q_i$$

$$C_e = \sum_{i=1}^{n} C_i \quad (48)$$

La capacidad equivalente es mayor que la capacidad de cualquiera de los conductores de la asociación.

La carga del condensador equivalente es la suma de las cargas de los condensadores.

7.5.1.2 Serie



$$Q_1 = Q_2 = Q$$

$$\Delta V = V_a - V_b = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{Q}{C_e}$$

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad (49)$$

Generalizando para una asociación de n condensadores en serie:

$$Q_i = Q = Cte$$

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$$

$$\frac{1}{C_e} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i} \qquad (50)$$

La capacidad equivalente es siempre menor que la de cualquier condensador de la asociación.

La carga del condensador equivalente es la misma que la de los condensadores de la asociación.

7.5.1.2 Mixta

Es una combinación de las anteriores. La capacidad equivalente depende del tipo de asociación (Ver ejemplos en clase)

7.5.2 Energía almacenada en un condensador cargado

Supongamos un condensador inicialmente descargado al que se le aplica una diferencia de potencial ΔV entre las armaduras.

Durante el proceso de carga, el trabajo para trasladar un dq desde la placa negativa a la positiva es:

$$dW = \Delta V \, dq = \frac{q}{C} dq \;\Rightarrow\; W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}$$

$$W = \Delta U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} Q\,\Delta V \tag{51}$$

Aunque la energía almacenada es proporcional a la carga, ésta tiene un valor máximo, ya que a partir de cierto valor ΔV se produce una descarga entre las armaduras del generador.

Para un condensador plano-paralelo, considerando la ecuación (45)

$$\Delta U = \frac{1}{2}\ C\,(\Delta V)^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 v E^2 \tag{52}$$

Donde v representa el volumen entre las armaduras.

La densidad de energía viene definida como

$$n = \frac{\Delta U}{v} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \tag{53}$$

Podemos suponer que la energía que adquiere n condensador cuando se está cargando esta almacenada en el campo eléctrico que se crea entre sus armaduras.

¿Cómo afecta el intercalar un dieléctrico entre las armaduras del condensador?

Si el medio que separa las dos armaduras del condensador es un medio dieléctrico, la capacidad del condensador aumenta en un factor adimensional k, denominada constante dieléctrica, respecto del valor en el vacío.

$$\Delta V = \frac{\Delta V_0}{k} = \frac{Q}{C} \tag{54}$$

$$C = k\,C_0 = k\ \frac{\varepsilon_0 S}{d} \tag{55}$$

Esto es debido a que si el dieléctrico esta formado por moleculares no polares, la aplicación de un campo eléctrico externo $\vec{E}_{ext}$ produce una separación entre las cargas, originándose una polarización de las moléculas, las cuales tienden a alinearse con el campo eléctrico externo. Es efecto produce una densidad de carga superficial opuesta en la superficies del dieléctrico σ_i que generan un campo eléctrico $\vec{E}_i$ que se opone al campo externo, por lo que el campo eléctrico neto es $E = E_{ext} - E_i$.

Considerando que $E_{ext} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ y $E_i = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_0}$ y que $E_{ext} = \frac{\Delta V_0}{d} = \frac{k\Delta\Delta}{d} = kE$

$$\sigma_i = \sigma\left(\frac{k-1}{k}\right) \tag{56}$$

7.6 Carga y descarga de un condensador

7.6.1 Carga

Los circuitos vistos hasta ahora, formados por baterías y resistencias, se denominan circuitos de corrientes estacionarias, ya que la intensidad que circula por cada rama es constante en el tiempo.

El circuito RC no es estacionario y la intensidad que circula por él varía en el tiempo, pasando de un valor máximo $I = I_0$ cuando el condensador no ha comenzado a cargarse a un valor mínimo $I = 0$ cuando el condensador ha alcanzado la carga máxima.

Consideremos una asociación en serie formada por una resistencia (R), un condensador (C) y generador de corriente continua (ε)

El balance de energías permite escribir

$$\varepsilon - \frac{q(t)}{C} - I(t)R = 0 \qquad (57)$$

Siendo q(t) e I(t) la carga del condensador y la intensidad que circula por el circuito en el instante t.

Derivando (57) respecto del tiempo y considerando que ε es constante y que $I = \frac{dq}{dt}$

$$I(t) = I_0\, e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (58)$$

Donde I_0 se obtiene en el instante inicial t = 0 para el cual q = 0, en cuyo caso

$$I(t{=}0) = I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$$

La intensidad que circula por el circuito decrece exponencialmente en el tiempo.

Como dq = I dt, integrando y sustituyendo en (58)

$$q(t) = Q\left[1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right] \qquad (59)$$

Donde Q es la carga máxima que corresponde a I = 0; $Q = C\varepsilon$

La carga del condensador aumenta de forma exponencial hasta un valor máximo Q.

$RC = \tau$ se denomina constante de tiempo del circuito. τ tiene unidades de tiempo y representa el tiempo que la intensidad disminuye hasta un valor e^{-1} respecto a su valor máximo. En el instante $t = \tau$ la carga del condensador aumenta en un factor 0,63.

7.6.2 Descarga

Consideremos un circuito RC formado por un condensador cargado inicialmente con un a carga Q.

Por el circuito circula una corriente no estacionaria I(t) la cual depende de la descarga en el condensador: $I(t) = \frac{dq(t)}{dt}$

El balance de energía en el circuito nos permite expresar: $\Delta V_C - IR = 0$

$$\frac{q(t)}{C} = I(t)\,R \qquad (60)$$

Sustituyendo $I = -\frac{dq}{dt}$ e integrando

$$q(t) = Q\,e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (61)$$

$$I(t) = I_0\,e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (62)$$

La intensidad de corriente I(t) y la carga almacenada en el condensador q(t) decrecen exponencialmente con el tiempo.

Aplicaciones

1.- Un condensador de 4μF se carga a $\Delta V = 24V$ y luego se conecta a una resistencia R = 200Ω. Determine: a) La carga inicial del condensador; b) La corriente eléctrica a través de la resistencia; c) La constante de tiempo del circuito; d) La carga que tiene el condensador en el instante t = 4ms.

2.- Una resistencia $R = 3x10^6\Omega$ y un condensador de 1.0μF se conectan en un circuito sencillo en serie con una batería ε = 4.0V. Al cabo de 1s después de conectar. Determine: a) Aumento de carga en el condensador; b) Almacenamiento de energía en el condensador; c) Calentamiento por efecto Joule en la resistencia; d) Energía que proporciona la batería.

7.7 Reglas de Kirchhoff

En general no es posible resolver un circuito aplicando solo la ley de Ohm y las reglas de asociación de resistencias. La resolución de circuitos más complejos (varias mallas) se simplifica aplicando las reglas de Kirchhoff.

Regla 1: Se deduce del principio de conservación de la carga, y establece que *la suma de las intensidades de corriente que llegan a un nudo debe de ser igual a la suma de las intensidades de corriente que salen de él.*

Regla 2: Se deduce del principio de conservación de la energía, y establece que *la suma de las diferencias de potenciales a través de cada elemento cerrado de un circuito tiene que ser cero.*

Hay que tener en cuenta las siguientes consideraciones al aplicar la 2ª regla:

a) Si se recorre una resistencia en el sentido de la corriente eléctrica, el cambio en el potencial es $-IR$.

b) Si se recorre una resistencia en el sentido contrario de la corriente eléctrica, el cambio en el potencial es IR.

c) Si se recorre un generador en el sentido del mismo, el cambio en el potencial es ε.

d) Si se recorre un generador en sentido contrario al mismo, el cambio en el potencial es $-\varepsilon$.

7.8 Aplicaciones

Resolución de circuitos complejos, formados por varias mallas. (Ver en clase)

7.9 Bibliografía

Fundamentos de Física: Electricidad y Magnetismo. Juan Hernández Alvaro y Joaquín Tovar Pescador. Universidad de Jaén.
Física para Ingenieros. Atanasio Lleo. Ediciones Mundi-Prensa.
Física para la Ciencia y la Tecnología. Paul A. Tipler y Gene Mosca. Editorial Reverté.
Física General. Enrique Burbano García. Editorial Librería General.
Física. R.A. Serway. Editorial Interamericana.

7.10 Problemas

1. Un cable conductor de cobre (ρ = 1.7x10^{-8} Ωm) cuyo diámetro es de 1.29 mm, puede transportar con seguridad una corriente máxima de 6 A.
a) ¿Cuál es la diferencia de potencial máxima que puede aplicarse a los extremos de 40 m de este cable?
b) Hallar la densidad de corriente y el campo eléctrico en este conductor cuando circulan por él 6 A.
c) Hallar la potencia disipada en el conductor en el apartado anterior.
Sol: a) 3.11 V ; b) 0.078 V/m, 4.6x10^{6} A/m^{2} ; c) 18.7 W

2. Un cable conductor de cobre de 80 m de longitud cuyo diámetro es de 1 mm, se une por un extremo con otro conductor de hierro de 49 m de largo del mismo diámetro. La corriente en cada uno de estos cables es de 2 A. Hallar : a) La diferencia de potencial aplicada a cada conductor. b) El campo eléctrico en cada conductor. c) La densidad de corriente en cada conductor.
Sol: a) 3.46 V, 12.48 V ; b) 0.043 V/m, 0.255 V/m ; c) 2.55x10^{6} A/m^{2}

3. Se conecta una batería de un coche prácticamente descargada cuya fem es de 10.0 V de 0.3 Ω de resistencia interna, a una resistencia de 1.156 Ω. Para ayudar a esta batería se conecta otra a sus bornes, cuya fem es de 12.0 V, con una resistencia interna de 0.5 Ω.
a) Dibujar el circuito y hallar la corriente que circula por cada una de sus ramas.

b) Hallar la potencia que aporta cada batería y en qué se invierte.
Suponer que tanto la fem como la resistencia interna de las baterías permanecen constantes.
Sol: a) 8 A, 5.5 A, 2.5 A ; b) 66 W, 25 W, 15.13 W, 1.88 W, 73.98 W

4. Se conectan tres condensadores idénticos de modo que su capacidad equivalente toma el valor máximo de 15 μF. Hallar las otras tres combinaciones posibles y sus capacidades equivalentes. *Sol: 3.3 μF; 7.5 μF; 1.7 μF*

5. En la figura 1 se ilustra una asociación de condensadores. a) Hallar la capacidad equivalente de este conjunto. b) Si las tensiones de ruptura de cada uno de los condensadores son V_1 = 100 V, V_2 = 50 V y V_3 = 400 V, ¿qué tensión máxima puede aplicarse entre los puntos *a* y *b*? *Sol: a) 5.0 μF; b) 133.3 V*

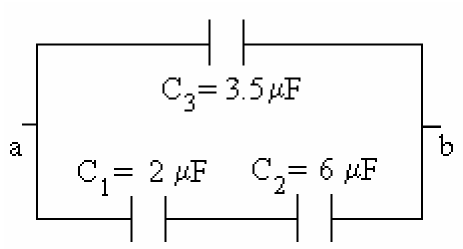


Fig.1. Problema número 4.

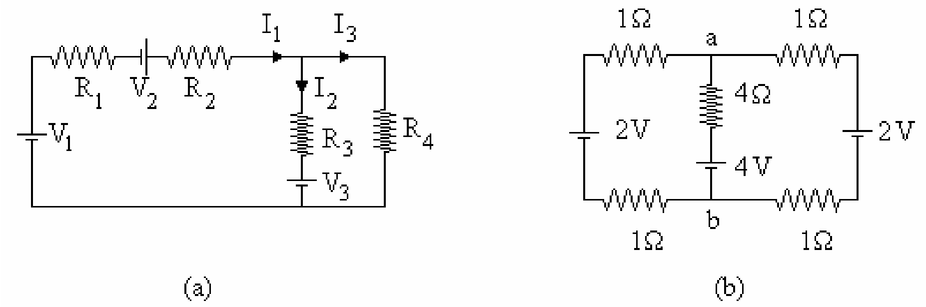
6. Proyectar un circuito de condensadores que tenga una capacidad de 2 μF y una tensión de ruptura de 400 V, utilizando todos los condensadores de 2 μF que se necesiten. Estos condensadores poseen todos ellos la misma tensión de ruptura, siendo ésta 100 V.
Sol: 4 ramas en paralelo de 4 condensadores asociados en serie cada una.

7. Se construye un condensador con dos placas cuadradas de lado *l* y separación *d*. Un material dieléctrico de constante *K* se introduce a una profundidad *x* dentro del condensador. En esta situación, hallar:
a) La nueva capacidad de este condensador.
b) La energía potencial electrostática almacenada en el condensador, para una diferencia de potencial dada V entre sus placas.

Sol: a) $C_{eq} = \frac{\varepsilon_o L}{d}\left(x(K-1)+L\right)$ *; b)* $E_p = V2\frac{\varepsilon_o L}{2d}\left(x(K-1)+L\right)$

8. En el circuito de la figura 1(a) hallar: a) La corriente en cada resistencia. b) La potencia suministrada por cada fem. c) La potencia disipada en cada resistencia.
Datos : V_1= 8 V, V_2= 4 V, V_3= 4 V, R_1= 1 Ω, R_2=R_3= 2 Ω, R_4= 6 Ω
Sol: a) I_1 = 2 A, I_2 = 1 A, I_3 =1 A ; b) 16 W, 8 W, 4 W ; c) 4 W, 6 W, 8 W, 2 W

9. En el circuito de la figura 1(b) hallar la diferencia de potencial entre los puntos a y b.
Sol: 2.4 V



10. En el circuito de la figura 2(a) se inserta en el punto *a* un amperímetro de resistencia interna 0.01Ω.
a) ¿Cuál será la lectura de este amperímetro?
b) ¿En qué porcentaje variará la corriente por la presencia de amperímetro?
c) Si se retira el amperímetro y se conecta entre los puntos *a* y *b* un voltímetro de 1000 Ω de resistencia interna, ¿cuál será la lectura de este voltímetro?
d) ¿En qué porcentaje varía la caída de potencial entre los puntos *a* y *b* por la presencia del voltímetro?
Sol: a) 1.974 A ; b) 1.3 % ; c) 1.48 V ; d) 0.001 %

11. Considerando el circuito representado en la figura 2(b). Demostrar que la lectura del amperímetro viene dada por:

$$\frac{\mathcal{E}}{R_t}, \quad \text{siendo } R_t = R_2 + R_A + r + \frac{R_2 + R_A}{R_1} r$$

Demostrar también que si se intercambian la fem y el amperímetro (junto con sus respectivas resistencias internas r y R_A), la lectura del amperímetro es:

$$\frac{\mathcal{E}}{R_t}, \quad \text{siendo } R_t = R_2 + R_A + r + \frac{R_2 + r}{R_1} R_A$$

12. En el circuito de la figura 2(c) el condensador se halla inicialmente descargado, estando abierto el interruptor S, cerrándose en el instante t=0 este interruptor.
a) ¿Cuál es la corriente suministrada por la fem en el momento en que se cierra el interruptor?
b) ¿Cuál es la corriente cuando ha transcurrido un tiempo bastante largo después de cerrar el interruptor?
c) Obtener la expresión de la corriente que circula por la fem como función del tiempo.
d) Si transcurrido un tiempo muy largo t' se abre de nuevo el interruptor S, ¿cuánto tiempo se tarda en disminuir la carga del condensador hasta el 10% del valor que posee en el instante t'?

Sol: a) $I = \dfrac{\mathcal{E}(R_1 + R_2)}{R_1 R_2}$*; b)* $I = \dfrac{\varepsilon}{R_2}$*; c)* $I(t) = \mathcal{E}\left(\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_1} e^{-t/\tau}\right)$, $\tau = R_1 C$*;*
d) $t = -\ln(0.1) C (R_1 + R_2)$

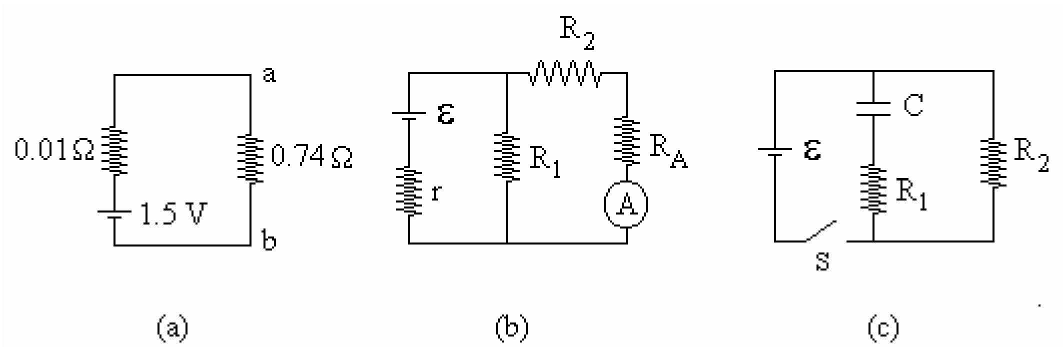


Fig.2. Problemas números 6, 7 y 8.

13. Un condensador de 6μF es cargado inicialmente mediante una diferencia de potencial de 100 V, luego se unen sus armaduras a través de una resistencia de 500 Ω.
a) ¿Cuál es la carga inicial del condensador?
b) ¿Cuál es la corriente un instante después de conectar la resistencia al condensador?
c) ¿Cuál es la constante de tiempo de este circuito?
d) ¿Cuánta carga existe en el condensador después de 6 ms?
Sol: a) 600 μC ; b) 0.2 A ; c) 3 ms ; d) 81 μC