Tema 3. DINÁMICA DE UN SÓLIDO RÍGIDO.

CONTENIDOS:

3.1 Introducción

3.2 Cinemática de la rotación alrededor de un eje fijo.

3.3 Momento de una fuerza y de un sistema de fuerzas.

3.4 Momento angular del sólido rígido.

3.5 Calculo de momentos de inercia.

3.5.1 Aplicaciones.
3.5.2 Teorema de los ejes paralelos o de Steiner.
3.5.3 Teorema de los ejes perpendiculares.
3.5.4 Radio de giro.

3.6 Energía cinética de rotación.

3.7 Cuerpos rodantes.

3.8 Movimiento giroscópico.

Nota: El contenido de estos apuntes pretende ser un resumen de la materia desarrollada en el curso. Por ello, el alumno debe de completarlo con las explicaciones y discusiones llevadas a cabo en clase y con la bibliografía recomendada.

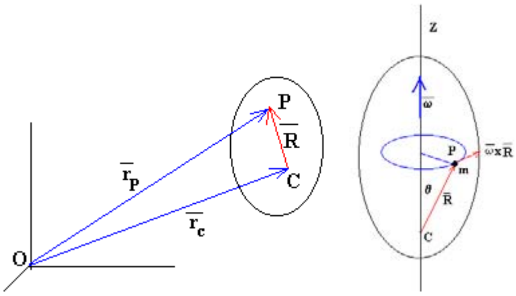
3.1 Introducción.

Sólido rígido: Es un caso especial de un sistema de muchas partículas, y considera que *la distancia entre las partículas de estos cuerpos permanece constante* (R = constante), o sea son absolutamente indeformables.

Planteemos el *movimiento general de un sólido rígido respecto* a un observador inercial O, (ver figura). La posición $\mathbf{r}_P$ de un punto P del sólido puede ponerse en función del centro de masas del sólido C como:

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_C + \mathbf{R}$$

donde $\mathbf{r}_C$ es el *vector de posición del centro de masas* del sólido y **R** el vector que va del centro de masas al punto P. **R** *es un vector cuyo módulo es constante*.



*Un **sólido rígido** se caracteriza por ser indeformable, las posiciones relativas de los puntos del sólido se mantienen fijas aunque se apliquen fuerzas al mismo.*

Si se deriva respecto del tiempo se obtiene:

$$\vec{v}_p = \vec{v}_c + \vec{\omega}\, x\, \vec{R}$$

El primer término es la velocidad del punto P, el segundo la velocidad del centro de masas y el tercero es la velocidad del punto P respecto del centro de masas.

Como el vector $\vec{R}$ tiene módulo constante, el único movimiento posible de P respecto de C es una rotación con velocidad angular $\vec{\omega}$ alrededor de un eje instantáneo que pase por C, tal como se ve en la figura de la derecha.

Por tanto, *el movimiento de un punto P del sólido se puede considerar como la suma de un movimiento de traslación del centro de masas más una rotación alrededor de un eje instantáneo que pasa por el centro de masas*.

Los cuerpos rígidos tienen como movimiento general una composición de un movimiento de traslación más otro de rotación. *Siempre es posible encontrar un sistema de referencia en traslación pero no rotante respecto del cual el movimiento del cuerpo parezca solo de rotación.*

Para un cuerpo rígido, si se conoce dónde está en un momento determinado una partícula y el ángulo θ de rotación del cuerpo respecto a la posición original, conocemos el resto de las posiciones de los puntos.

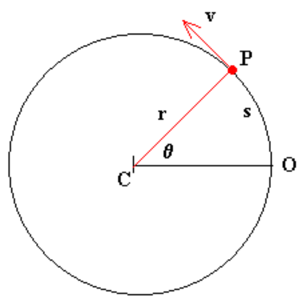
El ***movimiento general de un sólido rígido*** *es la composición de un movimiento de traslación del centro de masas y de un movimiento de rotación* alrededor de un eje que pasa por el centro de masas.

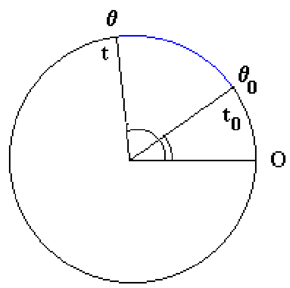
- En el movimiento de traslación, todos los puntos del sólido se mueven en trayectorias paralelas. La velocidad de un punto del sólido es la misma que la velocidad del centro de masas.

- En el movimiento de rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masas, la velocidad de un punto del sólido es proporcional la radio de la circunferencia que describe, y su dirección es tangente a dicha circunferencia.

3.2 Cinemática de la rotación alrededor de un eje fijo.

Sea una partícula genérica de masa m_i, perteneciente a un disco, a una distancia r_i del centro del disco, y cuyas coordenadas polares vienen dadas por r_i, θ_i . La ***posición o coordenada angular*** θ, de una partícula móvil que se encuentra en el instante ***t*** en el punto P está dada por el ángulo θ, que hace el vector CP y el origen de ángulos CO, siendo C el centro del disco.





En el instante t' la partícula móvil se encontrará en la posición P' dada por el ángulo θ'.

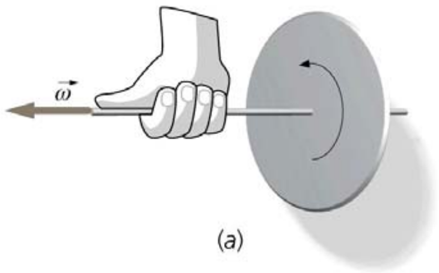
Todos los puntos que están en la recta CP tienen la misma ***coordenada angular*** θ, y cuando la recta CP se ha desplazado $\Delta\theta = \theta' - \theta$ en el intervalo de tiempo $\Delta t = t' - t$, (donde θ' es la posición angular de la recta CP en el instante t') la ***velocidad angular media del cuerpo*** *es igual al cociente entre le desplazamiento y el tiempo:*

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

La ***velocidad angular instantánea, en módulo,*** es *el límite del desplazamiento angular cuando el intervalo de tiempo tiende a cero,* o sea la derivada de θ respecto al tiempo:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

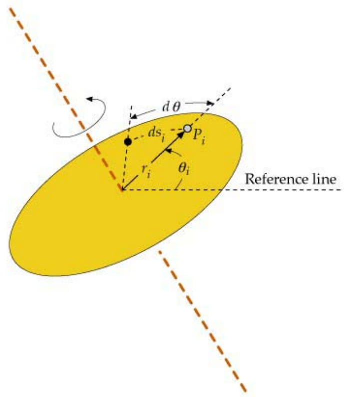
La velocidad angular es un vector cuyo módulo vale $\frac{d\theta}{dt}$ y *su dirección es perpendicular al plano descrito por las partículas girando,* o sea la del eje de giro, y *cuyo sentido viene dado por la regla de la mano derecha.*



Si llamamos ds_i el desplazamiento de la partícula m_i en el intervalo de tiempo dt se tiene que la velocidad v_i de la partícula es:

$$v_i = \frac{ds_i}{dt}$$

La relación entre ds_i y $d\theta$ es: $$d\theta = \frac{ds_i}{r_i}$$



La aceleración angular instantánea es el límite de la velocidad angular cuando el intervalo de tiempo tiende a cero, o sea la derivada de ω respecto al tiempo, o sea:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

La ***relación entre l a velocidad lineal y la velocidad angular*** es:

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad v = r\omega$$

vectorialmente: $\vec{v} = \vec{\omega}\, x\, \vec{r}$

La ***relación entre la aceleración tangencial a_t y la aceleración angular α*** es:

$$\frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a_t = r\alpha$$

$$\vec{a}_t = \vec{\omega}\, x\, \vec{r}$$

La ***relación entre la aceleración radial (o normal) a_n y la velocidad angular ω*** es:

$$a_{ir} = \frac{v_i^2}{r_i} = r_i\ \omega^2$$

En el S.I.: ***ángulo*** en radianes, la ***velocidad angular*** en radianes / segundo y la ***aceleración angular*** en rad/s^2.

Donde, como ya se sabe, ***radián*** *(unidad natural de medida de ángulos)* es la relación entre el arco y el radio. El ángulo θ se obtiene dividiendo la longitud del arco ***s*** entre su radio ***r***:

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{s'}{r'}$$

Las ***fórmulas del movimiento circular*** son similares a las relaciones entre las variables del movimiento de translación de las partículas. En forma general son:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{dt}}$$

$$\theta - \theta_0 = \int_{t_0}^{t} \omega\, dt \qquad \omega - \omega_0 = \int_{t_0}^{t} \alpha\, dt$$

En el ***movimiento circular uniforme*** la *velocidad angular ω_0 es constante* y, por tanto, la aceleración angular es cero. La posición angular θ_0 del móvil en el instante t se calcula integrando en las ecuaciones anteriores:

$$\theta - \theta_0 = \omega\, (t - t_0)$$

Las ***ecuaciones del movimiento circular uniforme*** son:

$$\alpha = 0$$
$$\omega = cte$$
$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

El ***movimiento circular uniformemente acelerado*** *es aquél cuya aceleración α es constante.* La aceleración angular se obtiene del cambio de la velocidad angular ω respecto del tiempo t:

$$\omega - \omega_0 = \alpha(t - t_0)$$

Las ***fórmulas del movimiento circular uniformemente acelerado*** son:

$$\alpha = cte$$
$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

*Relación entre la **velocidad lineal** v y la **velocidad angular** ω y entre la **aceleración lineal** a y la **aceleración angular** α* en forma vectorial:

$$d\vec{s} = \vec{d}\theta \wedge \vec{r}$$

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{v} = \frac{\vec{d}\theta}{dt} \wedge \vec{r} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{d}(\vec{\omega} \wedge \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \alpha \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{v} = \alpha\ r\ \vec{u}_T - \omega^2\ r\ \vec{u}_N$$

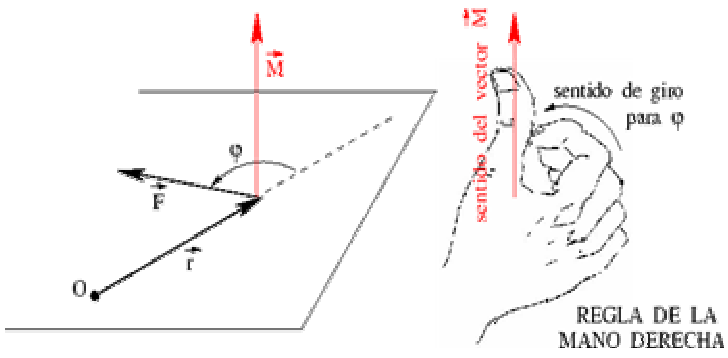
3.3 Momento de una fuerza y de un sistema de fuerzas.

Todo cuerpo que experimenta una aceleración es debido a una *fuerza*, pero ¿cuál es la causa de una rotación?. La respuesta a esta pregunta es: ***el momento de una fuerza***.

Sea un cuerpo rígido que puede girar alrededor de un eje fijo que pasa por el punto O y tal que se aplica una fuerza exterior $\vec{F}$ en el punto A (tal como se indica en la figura).

El ***momento de una fuerza*** $\vec{F}$ respecto de un punto ***O*** (o respecto de un eje que pase por O) es un vector $\vec{M}_0$ que es igual al *producto vectorial de dos vectores* $\vec{r}$ y $\vec{F}$, o sea:

$$\vec{M}_o = \vec{r} \wedge \vec{F}$$



Si las coordenadas de los puntos son $O(x_o,y_o,z_o)$ y de aplicación de la fuerza $A(x_A,y_A,z_A)$, el vector momento $\vec{M}_0$ tiene la expresión:

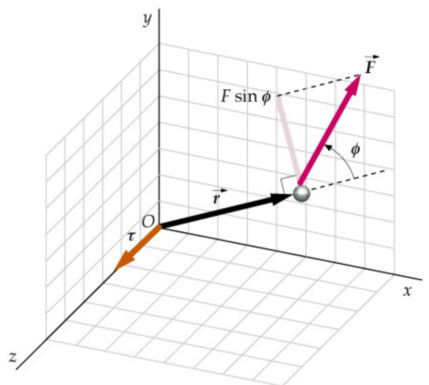
$$\vec{M}_o = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A - x_o & y_A - y_o & z_A - zo \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

y si las coordenadas de O son $O(0,0,0)$.

$$\vec{M}_o = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

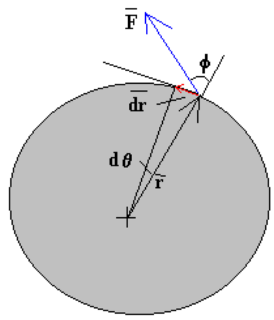
El ***módulo de*** $\vec{M}_0$ es igual a $r\ F\ sen\,\phi$, siendo ϕ el ángulo formado entre el vector $\vec{r}$ y el vector $\vec{F}$. La cantidad $r\ sen\,\phi$, es la distancia d entre el punto O y la línea de acción de la fuerza.

Por tanto la componente de la fuerza perpendicular ($F\ sen\,\phi$) al vector de posición es la que interviene realmente en el momento de la fuerza.



El ***trabajo realizado por la fuerza*** $\vec{F}$ a medida que el cuerpo recorre una distancia infinitesimal $ds = r\,d\theta$ en el tiempo dt es**:**

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F\ sen\phi\ r\ d\theta$$



F senϕ es la *componente tangencial de la fuerza*, la componente de la fuerza a lo largo del desplazamiento (y perpendicular al vector de posición). La componente radial de la fuerza no aporta momento de giro ni realiza trabajo, ya que es perpendicular al desplazamiento.

El *momento de la fuerza es el producto de la componente tangencial de la fuerza por el radio* y la expresión del trabajo se puede escribir como:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \; sen\phi \; r \; d\theta = M \; d\theta$$

La componente de la fuerza perpendicular al vector de posición es la que realmente interviene en la rotación.

El ***momento de un sistema de fuerzas*** $\vec{F}_i$ respecto de un eje (que pase por O) es un vector $\vec{M}_0$ que es igual a la suma de los *productos vectoriales de los vectores* $\vec{r}_i$ y $\vec{F}_i$, o sea:

$$\vec{M}_o = \sum_1^N \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i$$

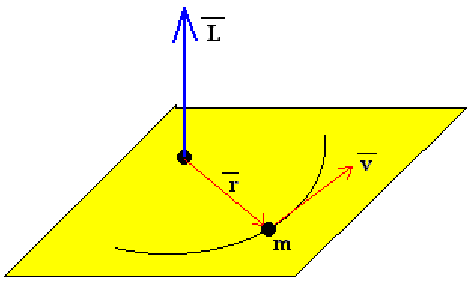
Cuando el punto de aplicación de las $\vec{F}_i$ es el mismo, el momento total es igual al momento de la resultante de las fuerzas $\vec{F}_R$

$$\vec{M}_o = \vec{r} \wedge \vec{F}_R$$

3.4 Momento angular del sólido rígido.

El ***momento angular de una partícula*** se define como el producto vectorial del vector posición **r** por el vector momento lineal $m\,\vec{v}$ **.**

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\,\vec{v}$$



Las partículas de un sólido rígido en rotación alrededor de un eje fijo describen circunferencias centradas en el eje de rotación con una velocidad que es proporcional al radio de la circunferencia que describen: $\vec{v}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i$ ($v_i = \omega \; r_i \, sen\,\theta_i = \omega R_i$) .

El ***vector momento angular*** $\vec{L}_i$ de una partícula de masa m_i cuya posición está dada por el vector $\vec{r}_i$ y que describe alrededor del eje fijo una circunferencia de radio R_i con velocidad $\vec{v}_i$, vale: $\vec{L}_i = m_i \; \vec{r}_i \wedge \vec{v}_i$

El *módulo del vector momento angular* es:

$$L_i = r_i \, m_i \, v_i$$

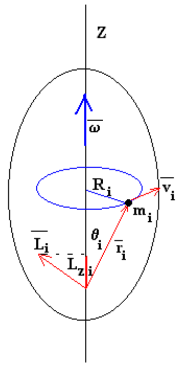
y su proyección sobre el eje de rotación Z (ver figura) es:

$$L_{iz} = m_i\, v_i\, r_i \cos(90º-\ \theta_i) = m_i \cdot (r_i\, sen\, \theta_i).\ (\omega\, R_i)$$

es decir, $$L_{iz} = m_i R_i^2 \omega$$

La proyección L_z del vector momento angular a lo largo del eje de rotación es:

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} L_{iz} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \right) \omega$$



El término entre paréntesis se ***denomina momento de inercia*** *I*

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

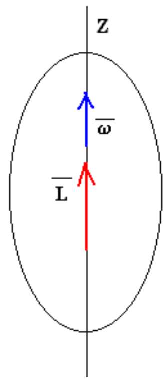
El *momento angular de todas las partículas del sólido* vale:

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i$$

En general, el ***vector momento angular*** $\vec{L}$ no tiene la dirección del eje de rotación, es decir, el vector momento angular no coincide con su proyección L_z a lo largo del eje de rotación. *Cuando coinciden se dice que el eje de rotación es un eje principal de inercia.* Los *momentos de inercia r*elativos a los *ejes principales de inercia* se denominan *momentos principales de inercia.*

Para los *ejes principales de inercia* la relación entre el momento angular $\vec{L}$ y la velocidad angular $\vec{\omega}$ (*son dos vectores que tienen la misma dirección, la del eje de rotación*) es:

$$\vec{L} = \mathrm{I}\ \vec{\omega}$$



El momento de inercia es una cantidad característica cuyo valor depende de la posición del eje de rotación (no como son la masa o el volumen).

Cuando el eje de rotación pasa por el centro de masas *el momento de inercia es mínimo*.

En general, para un sólido rígido considerado como un sistema de partículas de masa total *m* el *momento angular de todas las partículas del sólido* $\vec{L}$ teniendo en cuenta el *momento angular interno respecto al centro de masas* $\vec{L}_{cm}$ *es:*

$$\vec{L} = \vec{L}_{cm} + (m_1 + m_2 + ... + m_n)\, \vec{r}_{cm}\ x\ \vec{v}_{cm}$$

O bien: $$\vec{L} = \vec{L}_{cm} + m\, \vec{r}_{cm}\ x\ \vec{v}_{cm}$$

En dinámica de traslación, la fuerza $\vec{F}$ es igual a la variación del momento lineal respecto al tiempo: $$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

De igual modo, *en **dinámica de rotación** el momento de las fuerzas* $\vec{M}$ *es igual a la derivada temporal del momento angular* $\vec{L}$ *(ver demostración en clase).*

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Si además se tiene en cuenta que $\vec{L} = I\vec{\omega}$ y que $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$, se obtiene:

$$\vec{M} = I\vec{\alpha}$$

El cambio del momento angular respecto al tiempo es igual al momento de las fuerzas exteriores y también igual al producto del momento de inercia por la aceleración angular.

Si se deriva el *momento angular del sólido* $\vec{L}$ teniendo en cuenta el *momento angular interno respecto al centro de masas* $\vec{L}_{cm}$, se tiene:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} + m\frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} x\vec{v}_{cm} + m\vec{r}_{cm} x \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

Teniendo en cuenta que el segundo término es el producto vectorial de dos vectores

paralelos y que $m\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \vec{F}_{ext}$, se obtiene:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} + \vec{r}_{cm} x \vec{F}_{ext}$$

Conservación del momento angular

El ***principio de conservación del momento angular*** dice que *si el momento de las fuerzas exteriores sobre un cuerpo rígido es cero* (lo que no implica que las fuerzas exteriores sean cero, que sea un sistema aislado), *el momento angular total se mantiene constante.*

$$\vec{M}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \qquad \text{si } \vec{M}_{ext} = 0 \qquad \text{entonces} \qquad \vec{L} = cte$$

Si $\vec{M}_{ext} = 0$, implica que $I\ \omega$= constante y si el momento de inercia es constante (*I* = constante) ello implica que ω es constante.

- *Un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje principal se mueve con velocidad angular constante cuando no se aplican momentos externos.*

3.5 Cálculo de momentos de inercia.

Como ya se ha visto, el ***momento de una serie de fuerzas*** $\vec{F}_i$ aplicadas a un sólido respecto de un eje (que pasa por O) y cuyos radios vectores son $\vec{r}_i$ es un vector $\vec{M}_i$ que vale:

$$\vec{M}_i = \sum_1^N \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i$$

Y si se tiene en cuenta la componente tangencial $\vec{F}_{iT}$ y la componente radial $\vec{F}_{iR}$ de la fuerza se tiene:

$$\vec{M}_i = \sum_1^N \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \sum_1^N \vec{r}_i \wedge (\vec{F}_{iT} + \vec{F}_{iR}) = \sum_1^N \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{iT} + \sum_1^N \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{iR} = \sum_1^N \vec{r}_i \wedge m_i\ r_i\ \alpha$$

$$\vec{M}_i = \sum_1^N m_i\ r_i^2\ \alpha$$

$$\vec{M}_i = (\sum_1^N m_i\ r_i^2\ )\ \alpha = I\ \alpha$$

Para sistemas discretos el ***momento de inercia*** se define como $I = \sum_1^N m_i\ r_i^2$, donde r_i es la distancia de la partícula al eje de rotación.

Los *cuerpos reales* están formados por tal cantidad de pequeñas partículas que se les supone continuos. El ***momento de inercia de cuerpos reales continuos*** donde se supone una distribución continua de masa es:

$$I = \int_M r^2 dm$$

Si la distribución de masa es continua y volumétrica: $I = \int_V r^2 \rho dv$

donde *dm* es un elemento de masa situado a una distancia *r* del eje de rotación.

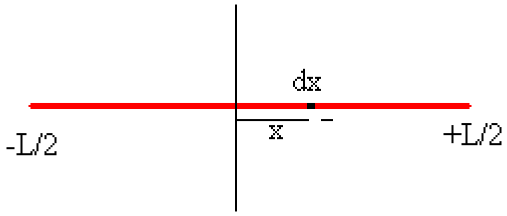
Las unidades del momento de inercia son el kgm^2.

El momento de inercia es para la rotación el análogo de la masa para una translación.

3.5.1 Aplicaciones:

Momento de inercia de una varilla

Cálculo del *momento de inercia de una varilla* de masa M y longitud L respecto de un eje perpendicular a la varilla que pasa por el centro de masas.



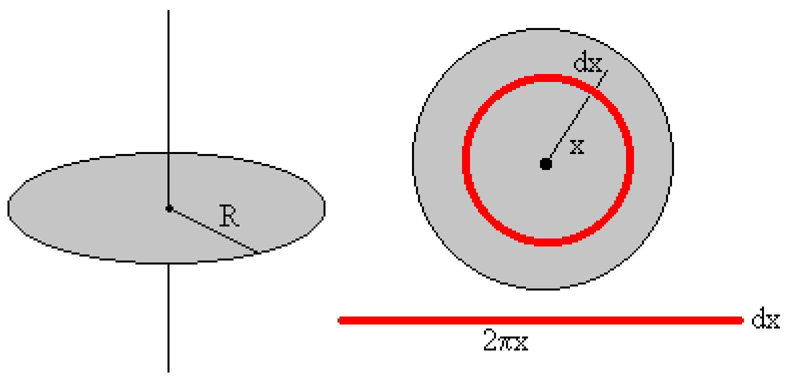
La masa dm del elemento de la varilla comprendido entre x y $x+dx$ es: $dm = \frac{M}{L} dx$

El momento de inercia de la varilla es:

$$I_C = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{M}{L} x^2 dx = \frac{1}{12} ML^2$$

Momento de inercia de un disco.

Calculemos el momento de inercia de un disco de masa M y radio R respecto de un eje perpendicular al plano del disco y que pasa por su centro.



Tomamos un elemento de masa (que dista x del eje de rotación) que es un anillo de radio x y de anchura dx. Dicho anillo si lo extendemos, se convierte en un rectángulo de longitud $2\pi x$ y anchura dx, cuya masa es:

$$dm = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi x dx = \frac{2M}{R^2} x dx$$

El *momento de inercia del disco* es:

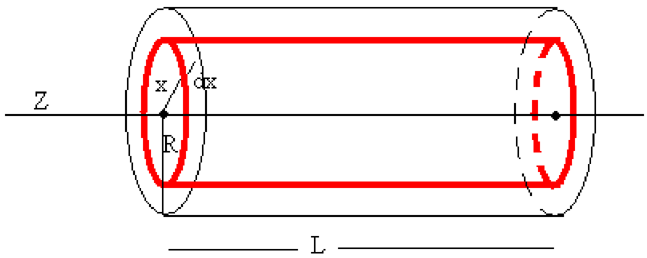
$$I_C = \int_0^R \frac{2M}{R^2} x^3 dx = \frac{1}{2} M R^2$$

Momento de inercia de un cilindro

Sea un cilindro de masa M, radio R y longitud L, el momento de inercia respecto de su eje se obtiene del siguiente modo:

Tomamos un elemento de masa que dista x del eje de rotación. El elemento es una capa cilíndrica cuyo radio interior es x, exterior $x+dx$, y de longitud L, tal como se muestra en la figura. La masa dm que contiene esta capa es

$$dm = \frac{M}{\pi R^2 L} 2\pi x dx L = \frac{2M}{R^2} x dx$$

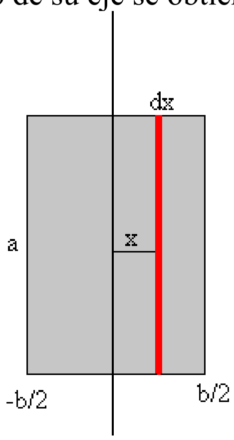


El *momento de inercia del cilindro* respecto de su eje es:

$$I_C = \int x^2 dm = \int_0^R \frac{2M}{R^2} x^3 dx = \frac{1}{2} M R^2$$

Momento de inercia de una placa rectangular.

Sea una placa rectangular delgada de masa M de lados a y b, el momento de inercia de respecto de su eje se obtiene del siguiente modo:



Tomamos un elemento de masa (que dista x del eje de rotación) que es un rectángulo de longitud a de anchura dx. La masa de este rectángulo es:

$$dm = \frac{M}{ab} a dx = \frac{M}{b} dx$$

El *momento de inercia de la placa rectangular* es:

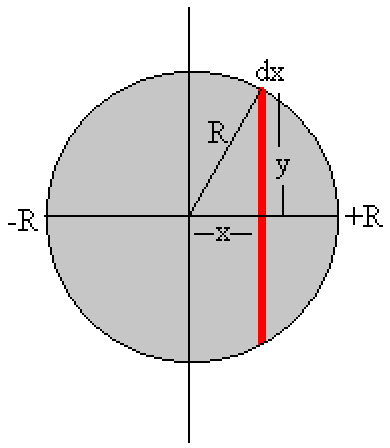
$$I_C = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{M}{b} x^2 dx = \frac{1}{12} Mb^2$$

Momento de inercia de un disco respecto de uno de sus diámetros.

Sea un disco de masa M y radio R, calculemos el momento de inercia respecto de uno de sus diámetros.

Tomamos un elemento de masa que dista x del eje de rotación. El elemento es un rectángulo de longitud $2y$ de anchura dx. La masa de este rectángulo es :

$$dm = \frac{M}{\pi R^2} 2y dx$$



El *momento de inercia del disco* es:

$$I_C = \int_{-R}^{R} \frac{M}{\pi R^2} 2x^2 y dx$$

Haciendo el cambio de variable:

$x = R \cdot \cos\theta$
$y = R \cdot \text{sen}\theta$

Que podemos expresar como:

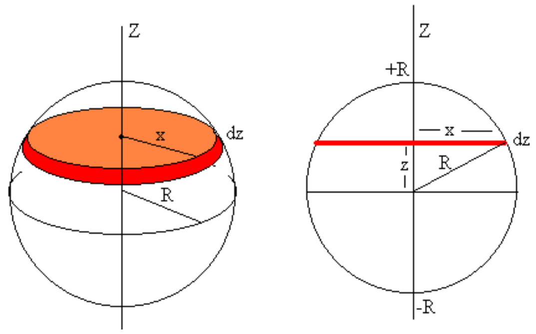
$$I_C = \frac{2M}{\pi R^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^4 \text{sen}^2\theta \cos^2\theta \cdot d\theta = \frac{MR^2}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \text{sen}^2 2\theta \cdot d\theta =$$
$$\frac{MR^2}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos 4\theta) \cdot d\theta = \frac{1}{4} MR^2$$

Momento de inercia de una esfera

Sea una esfera de masa M y radio R, el momento de inercia de respecto de uno de sus diámetros se obtiene:

Se divide la esfera en discos de radio x y de espesor dz. El momento de inercia de cada uno de los discos elementales es $\frac{1}{2} x^2 dm$. La masa de cada uno de los discos es:

$$dm = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\pi x^2 dz = \frac{3M}{4R^3}x^2 dz$$



El *momento de inercia de la esfera*, es la suma de los momentos de inercia de todos los discos elementales.

$$I_C = \int \frac{1}{2}x^2 dm = \int_{-R}^{R} \frac{1}{2}x^2 \frac{3M}{4R^3}x^2 dz = \frac{3M}{8R^3}\int_{-R}^{R} x^4\, dz$$

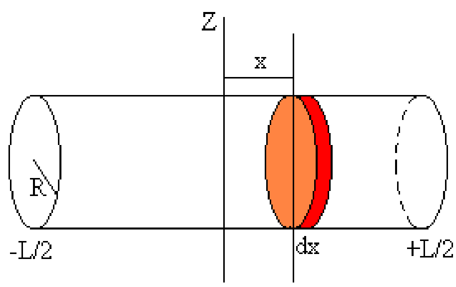
Usando la relación de la variable x con la z, $x^2 + z^2 = R^2$, se obtiene:

$$I_C = \frac{3M}{8R^3}\int_{-R}^{R}(R^2 - z^2)^2\, dz = \frac{3M}{8R^3}\int_{-R}^{R}(R^4 + z^4 - 2R^2 z^2)\, dz = \frac{2}{5}MR^2$$

Momento de inercia de un cilindro

Sea un cilindro de masa M, radio R y longitud L, el momento de inercia de respecto de un eje perpendicular a su generatriz y que pasa por su centro se obtiene: Dividimos el cilindro en discos de radio R y espesor dx. el momento de inercia de cada uno de los discos respecto de uno de sus diámetros es:

$$\frac{1}{4}R^2 dm = \frac{1}{4}R^2 \frac{M}{\pi R^2 L}\pi R^2 dx = \frac{M}{4L}R^2 dx$$



El *momento de inercia del cilindro* es:

$$I_C = \int_{-L/2}^{L/2}\left(\frac{1}{4}R^2 + x^2\right)\frac{M}{L}dx = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$$

3.5.2 Teorema de Steiner o de los ejes paralelos.

El ***teorema de Steiner*** nos *permite calcular el momento de inercia de un sólido rígido respecto de un eje de rotación que pasa por un punto O, cuando conocemos el momento de inercia respecto a un eje paralelo al anterior y que pasa por el centro de masas.* Esta relación es:

$$I = I_{cm} + m\, d^2$$

donde ***I*** es el momento de inercia del cuerpo respecto al eje paralelo al original, $\boldsymbol{I_{cm}}$ es el momento de inercia del eje que pasa por el centro de masas, ***m*** es la masa total del cuerpo y ***d*** es la distancia entre estos ejes paralelos.

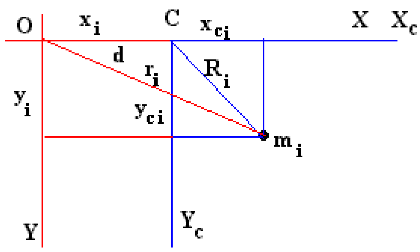
Deduzcamos este teorema.

Si el momento de inercia del sólido respecto de un eje que pasa por O es: $I_O = \sum m_i r_i^2$

y el momento de inercia respecto de un eje quepasa por C es: $I_C = \sum m_i R_i^2$

Si se relacionan r_i y R_i mediante la expresión:

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 = (x_{ic} + d)^2 + y_{ic}^2 = R_i^2 + 2dx_{ic} + d^2$$



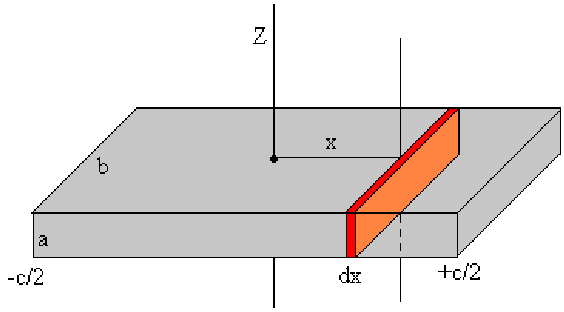
$$I_O = \sum m_i R_i^2 + 2d \sum m_i x_{ic} + d^2 \sum m_i$$
$$I_O = I_C + d^2 M$$

El término intermedio en el segundo miembro es cero ya que obtenemos la posición x_C del centro de masas desde el centro de masa.

El momento de inercia de un determinado cuerpo se puede determinar sabiendo que:

1. La simetría del cuerpo permite a veces realizar sólo parte del cálculo.
2. Como el momento de inercia es aditivo el cálculo de un momento de inercia de un cuerpo compuesto se puede tomar como la suma de los momentos de inercia de sus partes.
3. Muchas veces se obtiene el momento de inercia de un cuerpo respecto a un cierto eje mediante el momento respecto a otro eje usando el teorema de Steiner.

Ejemplo: *El momento de inercia de un paralepípedo* **usando el teorema de Steiner** . Sea un paralepípedo de masa M y de lados *a*, *b* y *c* respecto de un eje perpendicular a una de sus caras.



Dividimos el paralepípedo en placas rectangulares de lados *a* y *b* y de espesor *dx*.

El *momento de inercia de cada una de las placas* respecto de su eje de simetría es $\frac{1}{12}b^2 dm$

Aplicando el teorema de Steiner, se calcula el momento de inercia de esta placa respecto de un eje paralelo situado a una distancia *x* es:

$$\frac{1}{12}b^2 dm + x^2 dm = \left(\frac{1}{12}b^2 + x^2\right)\frac{M}{abc}ab\cdot dx = \left(\frac{1}{12}b^2 + x^2\right)\frac{M}{c}dx$$

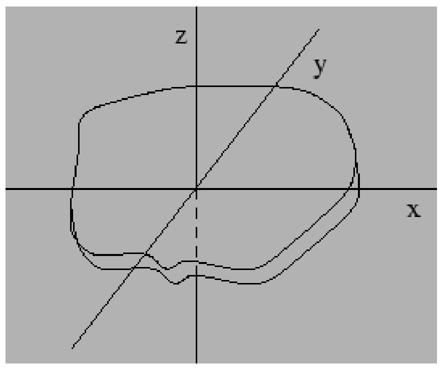
El ***momento de inercia del sólido en forma de paralepípedo*** es:

$$\int_{-c/2}^{c/2}\left(\frac{1}{12}b^2 + x^2\right)\frac{M}{c}dx = \frac{M}{12}(b^2 + c^2)$$

3.5.3 Teorema de los ejes perpendiculares.

El ***momento de inercia de una placa*** delgada (ver figura) respecto a un eje perpendicular a la placa *es igual a la suma de los momentos de inercia de dos ejes que estén contenidos en el plano de la placa*, que corten al eje perpendicular y sean todos perpendiculares entre sí.

Es decir, dado el dibujo de la figura tendremos que: $I_z = I_y + I_x$.



El *teorema de los ejes perpendiculares sólo se aplica a las figuras planas* y permite relacionar el momento perpendicular al plano con los momentos de otros dos ejes contenidos en el plano de la figura.

3.5.4 Radio de giro.

El radio de giro de un cuerpo respecto a un eje es la distancia al eje a la que debería estar un punto material, de la misma masa que el cuerpo, para que se verifique que el momento de inercia del cuerpo y del punto material con respecto al eje sean iguales.

Distribución de masa puntual:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = M R_g^2 \quad \Rightarrow \quad M R_g^2$$

Distribución de masa continua:

$$I = \int_M r^2 dm = M R_g^2 \quad \Rightarrow \quad R_g = \sqrt{\frac{\int_M r^2 dm}{M}}$$

Ejemplos:

1.- Demostrar que el radio de giro de una varilla delgada y homogénea de longitud L respecto a un eje perpendicular a ella y que pasa por el centro es: $R_g = \dfrac{L}{2\sqrt{3}}$.

2.- Demostrar que el radio de giro de una esfera homogénea de radio R respecto a un eje que pasa por su centro es: $R_g = \sqrt{\dfrac{2}{5}}$ R

3.6 Energía cinética de rotación

Al igual que un cuerpo con una cierta velocidad *v* tiene una energía cinética igual a $\frac{1}{2} m\, v^2$, los cuerpos que rotan tienen una energía cinética asociada a esta rotación.

Las partículas del sólido describen circunferencias centradas en el eje de rotación con una velocidad proporcional al radio de la circunferencia que describen $v_i = \omega \cdot R_i$. La energía cinética total es la suma de las energías cinéticas de cada una de las partículas, que puede expresarse en función del momento de inercia y de la velocidad angular de rotación como:

$$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i \omega^2 R_i^2 = \frac{1}{2}\left(\sum m_i R_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Si se considera un cuerpo rígido de masa total m que tiene un movimiento de traslación, siendo v_{cm} la velocidad del centro de masas, que además está girando con respecto a un eje que pasa por su centro de masas, la energía cinética total es igual a la de traslación del centro de masas más la de rotación, es decir:

$$E_c = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$$

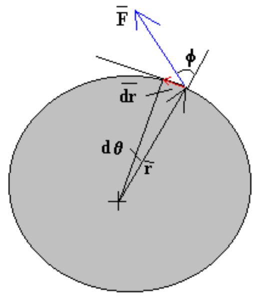
Trabajo, energía e impulso angular en el movimiento de rotación.

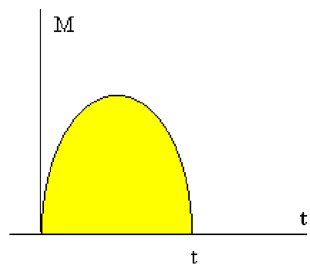
Cuando se vio el ***trabajo realizado por una fuerza*** $\vec{F}$ de un cuerpo que gira cuando recorre una distancia infinitesimal $ds = r\, d\theta$ en el tiempo dt era**:**

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F\ sen\phi\ r\ d\theta$$

y que el momento de la fuerza era el producto de la componente tangencial de la fuerza por el radio:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F\ sen\phi\ r\ d\theta = M\ d\theta$$





El trabajo total cuando el sólido gira un ángulo θ es:

$$W = \int_0^\theta M \cdot d\theta = \int_0^\theta I \alpha d\theta = \int_0^\theta I \frac{d\omega}{dt} d\theta = \int_{\omega_0}^{\omega} I \frac{d\theta}{dt} d\omega =$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} I \omega \cdot d\omega = \frac{1}{2} I \omega^2 - \frac{1}{2} I \omega_0^2$$

El trabajo de los momentos de las fuerzas que actúan sobre un sólido rígido en rotación alrededor de un eje fijo es igual a la variación de su energía cinética de rotación.

Si se aplican una serie de fuerzas durante un tiempo *t el momento de las fuerzas que se aplican durante un tiempo t a un sólido rígido en movimiento de rotación alrededor de un eje fijo es igual a la variación del momento angular del sólido en rotación.*

$$\int_0^t M \cdot dt = I\omega - I\omega_0$$

Analogías entre dinámica de traslación y de rotación.

Para facilitar el estudio de la dinámica de la rotación se tienen en cuenta las siguientes analogías con la dinámica normal.

traslación	Rotación
x	θ
v	ω
a	α
m	$I = \sum_i m_i r_i^2$
$\vec{p}$	$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$
$\vec{F}$	$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$
$F = ma$	$M = I\alpha$
$F = \frac{dp}{dt}$	$M = \frac{dL}{dt}$
$p = mv$	$L = I\omega$
$W = Fd$	$W = M\theta$
$E_c = \frac{1}{2}mv^2$	$E_c = \frac{1}{2}I\omega^2$

3.7 Cuerpos rodantes

Cuando un cuerpo rueda sin deslizar existe una relación (*una ligadura*, en lenguaje físico), entre el ángulo que rota y la distancia que avanza, que para un cuerpo redondo (p.e. un aro, un cilindro o una esfera) es: $s = R\theta$, siendo R el radio del cuerpo.

La fuerza de rozamiento (para que el cuerpo ruede sin deslizar) no realiza un trabajo neto, por lo que la energía mecánica se conserva.

Sin embargo, si el movimiento de rodadura es con deslizamiento, la naturaleza de la fuerza de rozamiento cambia de estática a cinética y realiza además un trabajo que se transforma en una disminución de la energía final del cuerpo.

La velocidad y la aceleración del centro de masas están relacionadas con la velocidad y la aceleración angulares de rotación respectivamente como: $\left.\begin{array}{lcl} v_{cm} & = & R\omega \\ a_{cm} & = & R\alpha \end{array}\right\}.$

Si tenemos un caso de un cuerpo simétrico que rueda respecto a un eje que pasa por su centro de masas y todas las fuerzas externas son conservativas, se puede aplicar el teorema de conservación de la energía:

$$E = E_{c,1} + E_{p,1} = E_{c,2} + E_{p,2}.$$

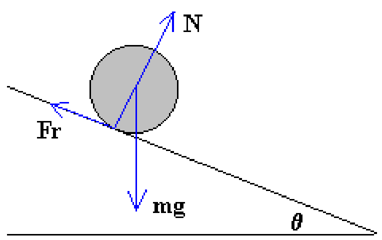
en este caso, además se cumple que:

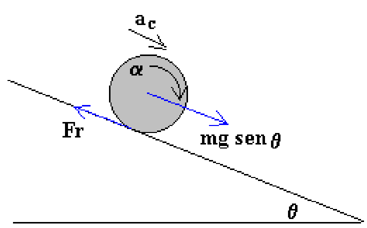
$$E_c = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Movimiento de un cuerpo a lo largo de un plano inclinado.

Estudiemos el movimiento de un cuerpo (un aro, un cilindro o una esfera) que rueda a lo largo de un plano inclinado. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo (ver figura) son:

- El peso
- La reacción del plano inclinado.
- La fuerza de rozamiento en el punto de contacto entre la rueda y el plano.





Si se descompone el peso en una fuerza a lo largo del plano y otra perpendicular al plano inclinad, las ecuaciones del movimiento son las siguientes:

- Movimiento de traslación del c.m.: $m\,g \cdot \text{sen}\theta - F_r = m\,a$
- Movimiento de rotación alrededor de un eje que pasa por el c.m.: $F_r R = I_c\,\alpha$.
- Relación entre el movimiento de traslación y rotación (sin deslizar): $a = \alpha\,R$.

Si se conoce el ángulo de inclinación θ y el momento de inercia I_c del cuerpo que rueda, se pueden calcular a y el valor de la fuerza de rozamiento F_r como:

$$a_c = \frac{g \cdot \text{sen}\,\theta}{1+k} \qquad F_r = k\frac{mg \cdot \text{sen}\,\theta}{1+k}$$

donde el momento de inercia $I_c = k\,mR^2$ y k es un factor geométrico (que vale 2/5 para la esfera, 1/2 para el cilindro y 1 para el aro) que se expresa como:

$$k = \frac{I_c}{m\, R^2}$$

Luego la aceleración del cuerpo (que es la de su centro de masas*) es independiente de la masa y del radio del objeto, solamente depende de de su forma.*

Para calcular la velocidad del cuerpo después de haber recorrido una longitud x a lo largo del plano inclinado, partiendo del reposo, empleamos las ecuaciones del m.u.a.:

$$x = \frac{1}{2} a_C t^2$$
$$v_C = a_C t$$

La velocidad final v_c del c. m. del cuerpo al llegar al final del plano inclinado es

$$v_c^2 = 2a_c x = \frac{2g\,\mathrm{sen}\,\theta}{1+k} x = \frac{2gh}{1+k}$$

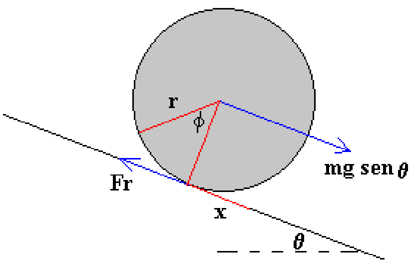
Siendo h la altura de partida del cuerpo respecto a la posición final, $h = x \cdot \mathrm{sen}\theta$.

De nuevo se tiene que la velocidad del cuerpo (que es la de su centro de masas*) es independiente de la masa y del radio del objeto, solamente depende de de su forma.*

La energía cinética de un cuerpo que rueda es la suma de la energía cinética de traslación del c.m. y la energía cinética de rotación alrededor del c.m.

$$E_k = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2$$

El trabajo total de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo que rueda es la suma del trabajo en el movimiento de traslación más el trabajo en el movimiento de rotación:



$W = W_t + W_r$

donde $W_t = (m\, g\, \mathrm{sen}\theta - F_r)\, x = m\, g\, h - F_r x$ $\qquad W_r = M\, \phi = F_r R\, \phi = F_r x$

Luego el trabajo total es: $\qquad W = m\, g\, h$

La fuerza de rozamiento en el movimiento de rodar *produce dos trabajos de la misma magnitud pero de signos opuestos*. Esta es la razón por la que el trabajo neto de la fuerza de rozamiento es cero y no influye en el balance de energía.

El trabajo de la resultante de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo modifica su energía cinética (de traslación del c.m. y de rotación alrededor de un eje que pasa por el c.m.) y es otra forma de calcular la velocidad final v_c del c. d. m.

$$mgh = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2$$

La velocidad final v_c del c. m. del cuerpo al llegar al final del plano inclinado (que es la misma que se ha calculado a partir de las ecuaciones dinámicas) es:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}kmR^2\frac{v_c^2}{R^2} \qquad v_c^2 = \frac{2gh}{1+k}$$

El cuadrado de la velocidad del c.m. v_c es proporcional a la altura inicial h pero en todo caso $< 2\,g\,h$.

3.8 Movimiento giroscópico.

Los cuerpos en rotación se caracterizan por poseer dos propiedades que son la *inercia giroscópica* o *rigidez en el espacio* y la *precesión.*

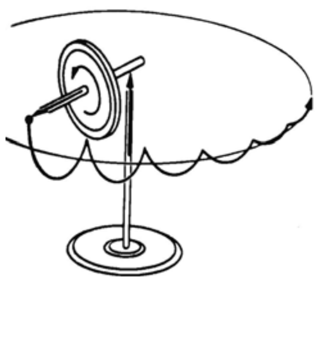
La **rigidez en el espacio** *es la tendencia que tienen todos los cuerpos en rotación a seguir girando en el mismo plano y sobre el mismo eje*.

La **precesión** *es el movimiento generado al cambiar la orientación del eje (o plano) de rotación*, *producto de una fuerza externa que actúa perpendicularmente a la variación*.

Existen diversos ***tipos de giroscopios**, de uno, dos o tres grados de libertad*, dependiendo de las direcciones en que se mueve el eje de rotación, y el sistema de soporte que utiliza.

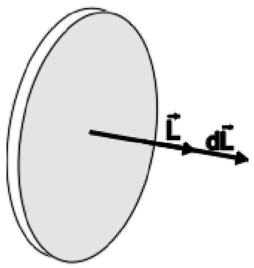
Si observamos la siguiente figura se pueden distinguir *tres movimientos particulares*. El *de giro* de la rueda alrededor del eje de rotación, la *precesión de dicho eje* y un *movimiento cicloide* (como de cabeceo o tambaleo), denominado *nutacion*.

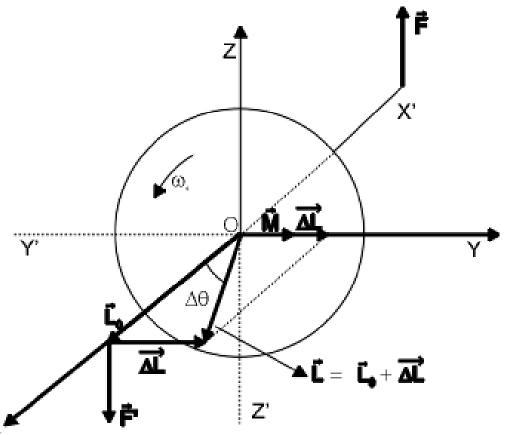
Veamos el origen de los dos últimos fenómenos



Rotación alrededor de un eje móvil. Trompo, giroscopio y Tierra.

Cuando a un sólido que está girando se le aplica un momento $\vec{M}$ en la dirección del eje de giro, dicho momento produce una variación del momento cinético $d\vec{L} = \vec{M}\, dt$, también en la dirección del eje, que da lugar a una variación de la aceleración angular $\vec{\alpha}$.





Si el cuerpo *es una rueda* (*por ejemplo de bicicleta*) (contenida en el plano YZ) la cual gira con velocidad angular ω_0 alrededor del eje X y le aplicamos en dos puntos de dicho eje un par de fuerzas $\vec{F}$ y $\vec{F}'$ paralelas al eje Z, el momento que producen sólo tiene componente según el eje Y. En un tiempo Δt la *variación producida en el momento cinético* por el momento $\vec{M}$ es:

$$\Delta\vec{L} = \vec{M}\Delta t \qquad \text{y} \qquad \vec{L} = \vec{L}_0 + \Delta\vec{L}$$

siendo $\vec{L}_0$ e $\Delta\vec{L}$ perpendiculares entre sí. En consecuencia $\vec{L}$ estará en el plano XY pero desplazado un ángulo Δθ*;* como $\vec{L}$ tiene que ir a lo largo del eje de giro, éste también habrá girado un ángulo Δθ y lo mismo ha ocurrido con el plano de la rueda.

De esta manera, el par de fuerzas $\vec{F}$ y $\vec{F}'$ *no obliga a la rueda a levantar su eje por la parte posterior y a hacerlo descender por la anterior* como ocurriría si la rueda no girase sino a que le obliga a girar (su parte posterior gira hacia la izquierda y su parte anterior hacia la derecha) siempre en torno al eje Y. *A este movimiento de rotación* se le llama ***precesión,*** siendo Ω = dθ/dt su ***velocidad angular de precesión***.

Supongamos ahora que la rueda que gira es el motor y la ***hélice de un aeroplano*** que se mueve a lo largo del eje X. *Si el piloto desea virar hacia la izquierda,* o sea cambiar la dirección del eje de rotación de $\vec{L}_0$ a $\vec{L}$, los cojinetes del motor y de la hélice tienen que ejercer un par sobre el eje, equivalente al producido por el par $\vec{F}$ y $\vec{F}$. En virtud del tercer principio el eje ejercerá un par sobre los cojinetes que tiende a *elevar el morro del avión y a bajar la cola,* efecto que ha de ser contrarrestado por los timones de profundidad. De la misma manera si el avión vira a la derecha, baja el morro y sube la cola. Recíprocamente *un cambio en la altura de vuelo* hará virar al avión a la izquierda si sube o a la derecha si baja.

Para *calcular la* ***velocidad angular de precesión*** **Ω** *en el movimiento giroscópico* supongamos $\Delta\theta$ lo suficientemente pequeño como para que $\vec{L}$ y $\vec{L}_0$ tengan el mismo módulo aunque distinta dirección, el momento cinético no variará en módulo: $L = L_0$

La única alteración se produce en la dirección de $\vec{L}_0$. El par cambia la dirección pero no la magnitud de $\vec{L}$ de manera análoga a la forma de actuar de la fuerza centrípeta sobre la velocidad tangencial en el movimiento circular.

Si el ángulo $\Delta\theta$ es pequeño: $sen\theta \cong \Delta\theta$ y $\Delta\theta = \frac{\Delta L}{L} = \frac{M\Delta t}{L}$

la ***velocidad de precesión*** será entonces: $\Omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{M}{L}$

y si además *el eje de giro es el de simetría* $L = I\,\omega$ y $\Omega = \frac{M}{I\omega}$

El giróscopio.

En 1851, *Foucault* ideó un dispositivo para poner de manifiesto la rotación de la Tierra el *giróscopo* (*gyros*, rotación; *scopos*, verse o poner de manifiesto).

El ***giróscopo*** consiste en *un sólido rígido simétrico que se fija al centro de masas, pero se le permite cualquier rotación en torno a éste*. El sistema de fuerzas de ligadura se reduce a una fuerza única que pasa por el centro de masas. Cuando el sólido gira a alta velocidad, la rotación inicial está dirigida según el eje de revolución, esta rotación se mantiene y es estable. Una pequeña perturbación en las condiciones iniciales o debida a interacciones se traduciría en una rotación próxima a una dirección fija.

El giróscopo es un *instrumento mecánico cuyo elemento fundamental es un sólido rígido de revolución con un punto fijo que gira con gran velocidad alrededor de un eje muy cercano al de revolución;* es muy práctico para poner en evidencia si la rotación del mismo permanece constante respecto a la Tierra o, por el contrario, evoluciona respecto a ésta, evidenciando su rotación.

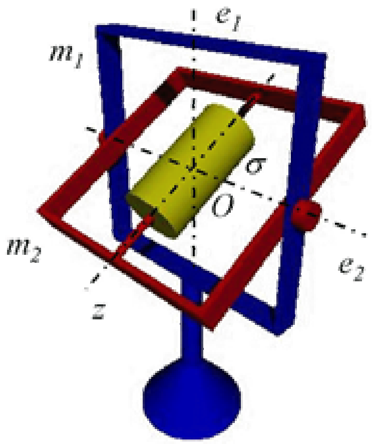
El ***giróscopo de Foucault*** *funciona como una brújula y como un sextante*, pues dado que el eje del mismo gira en torno al eje terrestre, evidencia la dirección del mismo. El ángulo que forma dicho eje con el plano horizontal determina la latitud y su proyección sobre dicho plano representa la dirección N-S.

En 1908 el norteamericano Elmer Sperry patentó una ***brújula giroscópica*** que buscaba el norte y poco después desarrolló el ***estabilizador giroscópico*** para buques. Desde entonces se han desarrollado multitud de aplicaciones de los giróscopos, como p. e. *pilotos automáticos o como estabilizadores de trenes monorraíl, etc.*

Un ***giróscopo*** es un aparato en el cual *una masa que gira velozmente alrededor de su eje de simetría, permite mantener de forma constante su orientación respecto a un sistema de ejes de referencia*. Cualquier cuerpo sometido a un movimiento de rotación acusa propiedades giroscópicas, *por ejemplo una peonza*.

Para fabricar un giróscopo, el elemento giratorio debe estar construido con un *material pesado o de muy alta densidad, con su masa repartida de forma uniforme* y que además *rote a gran velocidad* con el mínimo posible de resistencia por fricción.

Este elemento giratorio se monta sobre un sistema de ejes que confieren al giróscopo distintos grados de libertad de movimientos, siendo el más comúnmente utilizado el denominado ***montaje universal***, en el cual el giróscopo es libre de moverse en cualquier dirección sobre su centro de gravedad. Un giróscopo de este tipo se dice que tiene tres planos o tres grados de libertad.



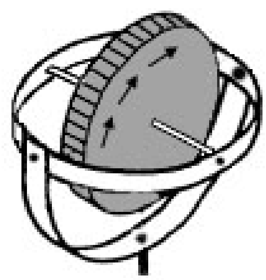


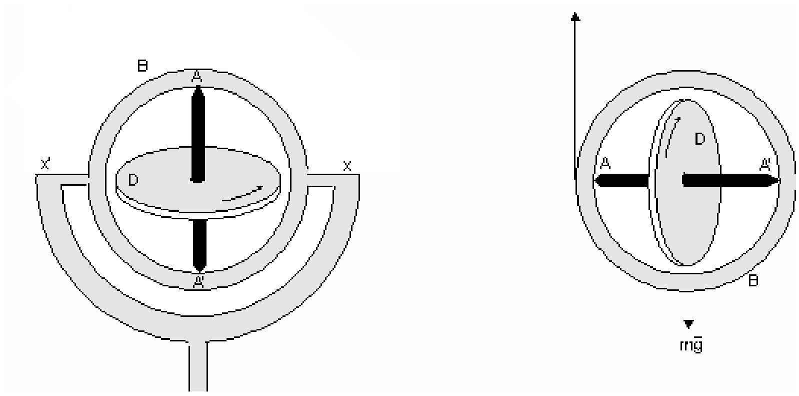
Fig.2.2.5 - Giróscopo.

Un ***giróscopo básico*** es como el que se muestra en la figura, y consta de una *suspensión Cardan* con dos marcos (m_1 azul y m_2 rojo) de forma que m_1 gira libremente en torno al eje e_1 y m_2 gira libremente en torno al eje e_2 de m_1. Finalmente, el sólido σ (amarillo) gira libremente en torno al eje z de m_2.

Los giróscopos proporcionan unos planos fijos de referencia, planos que no deben variar aunque cambie la posición del avión (o del barco, etc.). Gracias a esto, el piloto dispone de instrumentos que *le proporcionan la posición espacial del avión con respecto a distintos ejes o planos de referencia*. Estos instrumentos son: *indicador de actitud también llamado "**horizonte artificial**"*, *indicador de giro y virajes* denominado también "***bastón y bola***", e *indicador de dirección*.

Un ***giróscopo*** es, por tanto, un aparato constituido por *un cuerpo de gran momento de inercia* (un disco D en la figura a) *que gira a gran velocidad* alrededor del eje AA'.

Cuando el *disco D está situado horizontalmente* y el círculo B tiene la posición de la figura, *no existe momento de las fuerzas exteriores* y, por tanto, el *momento angular* ($I\vec{\omega}$)) *será constante* en módulo y dirección. Como el momento de inercia del disco no cambia, la velocidad angular del disco $\vec{\omega}$ será constante. La experiencia muestra que, efectivamente, el eje de rotación AA' se mantiene fijo y es necesario ejercer un par, para modificar su dirección.



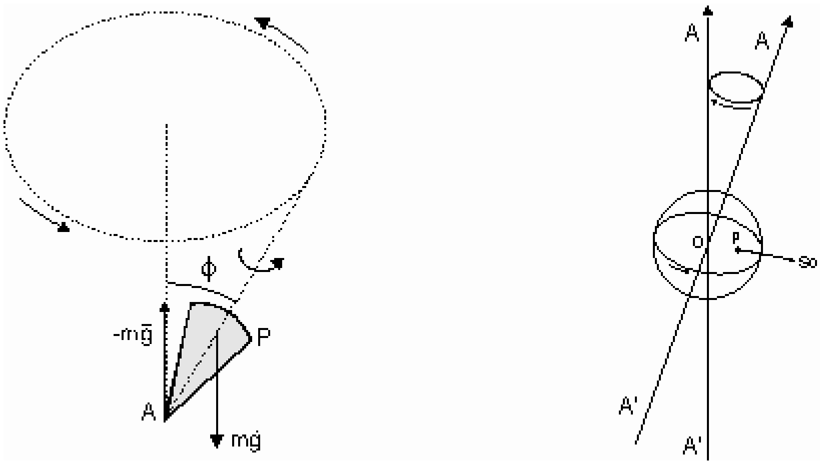
Si ponemos el giróscopo como indica la figura b, suspendiéndole de un hilo fijo en A, actúa un par debido al peso del propio giróscopo. Se observa entonces que da vueltas en torno al eje Z efectuando un movimiento de *precesión.*

La precesión es producida por el par o momento $\vec{M}$, por tanto si se logra anular este par, haciendo que se equilibre el eje de rotación poniendo un peso determinado del lado contrario de la rueda, nuestro $d\vec{L}$ será cero y por tanto la rueda seguirá rotando siempre en la misma dirección, independiente que el soporte varíe su posición. Incluso la rotación del globo terrestre no afecta al giroscopio, cuyo eje seguirá orientado en su dirección original (lo que viene siendo una prueba de la rotación de la Tierra).

Además, *si esta dirección coincide con el eje norte-sur de la Tierra,* el fenómeno anterior permite *utilizar el giroscopio como una brújula*.

El movimiento de precesión es el mismo *movimiento que se observa cuando una* ***peonza*** gira alrededor de un eje AA' que no coincide con la vertical.

En este caso el par de fuerzas que produce la precesión son su peso m$\vec{g}$ aplicado en el c.d.g. y la fuerza de reacción –m$\vec{g}$ que aparece en el punto de apoyo O, el cual se considera fijo. Si no existiese el efecto giroscópico la peonza caería instantáneamente al suelo por acción precisamente de este par de fuerzas (m$\vec{g}$, –m$\vec{g}$) que se genera (*ver figura siguiente*). En la realidad, la peonza acaba por caer al suelo porque, debido al rozamiento que no hemos tenido en cuenta, el ángulo ϕ se hace cada vez mayor.



La misma ***Tierra*** *puede considerarse como un gran giróscopo* que gira con una velocidad angular de 7,29 x 10^{-5} rad/s.

Como no es una esfera perfecta, la fuerza de atracción del Sol no está aplicada en el centro O de la Tierra sino en un punto P, apareciendo entonces un momento. *Su eje describe* como en los casos anteriores, *un movimiento de precesión*.

Cada veintiséis mil años describe un cono, de tal manera que su dirección, que es ahora la de la estrella polar, estará dirigida hacia la estrella Vega de la constelación de Lira dentro de 12 800 años.