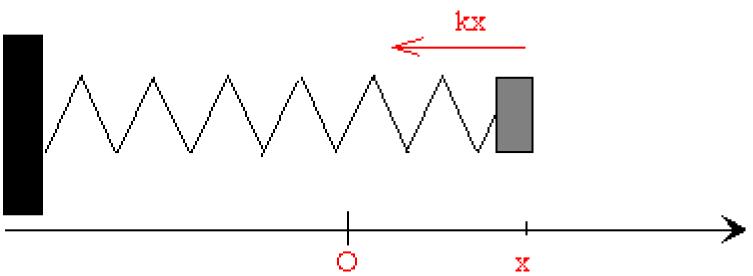
Tema 5

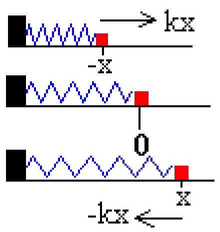
OSCILACIONES ARMÓNICAS

Nota: El contenido de estos apuntes pretende ser un resumen de la materia desarrollada en el curso. Por ello, el alumno debe de completarlo con las explicaciones y discusiones llevadas a cabo en clase y con la bibliografía recomendada.

5.1. Introducción.

Cuando la fuerza que actúa en una partícula o sistema es proporcional al desplazamiento respecto a un punto de "equilibrio", siguiendo la ley de Hooke, ($\vec{F} = -k\,\vec{x}$) el móvil se dice que describe un ***movimiento armónico simple.***





Una partícula ***oscila*** *cuando se mueve periódicamente respecto de su posición de equilibrio.* ***Periódico***: es todo movimiento *que se repite* cadenciosamente *cada mismo intervalo de tiempo.* Se puede demostrar que la gran mayoría de los sistemas que tiene un punto de equilibrio estable admiten un tratamiento armónico para pequeñas oscilaciones en torno a dicho punto.

5.2 Movimiento armónico simple (M.A.S.).

Para que un móvil de masa m describa un M.A.S, la fuerza ha de ser proporcional al desplazamiento x y de sentido contrario a éste ($\vec{F} = -k\,\vec{x}$). Si aplicamos la segunda ley de Newton, ($\vec{F} = m\,\vec{a}$), junto con la ley de Hooke ($\vec{F} = -k\,\vec{x}$), obtenemos que:

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = -k\,\vec{x} = m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -\,m\,w^2\,x$$

En esta sencilla ecuación la aceleración es proporcional al desplazamiento x:

$$a = -\frac{k}{m}\,x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\,w^2\,x \qquad \text{que da:} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + w^2\,x = 0$$

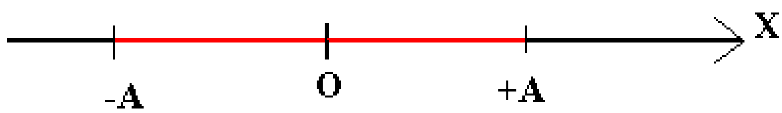
Esta última ecuación diferencial constituye la *ecuación de movimiento* de un sistema que cumpla la ley de Hooke y con ella se obtiene la solución general a un ***movimiento armónico simple:***

$$x = A\,sen(w\,t + j\,)$$

donde A es la *amplitud máxima* que puede recorrer el móvil; w la *frecuencia angular* (el número de “radianes”' que recorre en un segundo); $w\,t+j$ la *fase* y j la *fase inicial*.

Una partícula describe un ***Movimiento Armónico Simple*** (M.A.S.) cuando *su posición x viene dada en función del tiempo t por dicha expresión.*

Como los valores máximo y mínimo de la función seno son +1 y -1, el movimiento se realiza en una región del eje X comprendida entre +*A* y -*A*.



Como la función seno para describir este movimiento es periódica y se repite cada 2π, por tanto, el movimiento es periódico y se repite cuando el argumento de la función seno se incrementa en 2π, es decir, cuando transcurre un período de tiempo T tal que $w\,(t+T) + j = w\,t + j + 2p$.

$$T = \frac{2p}{w} = \frac{1}{f}$$

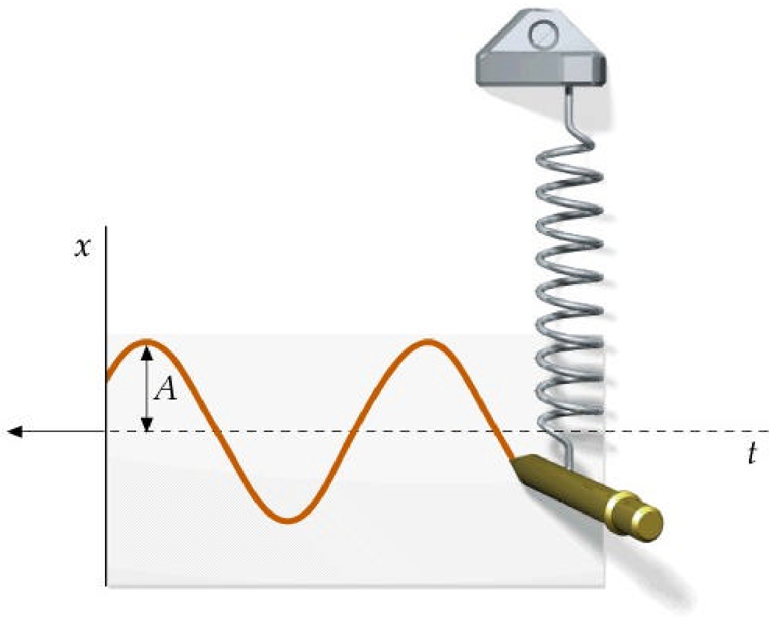
Período (T): *Tiempo en el que se realiza una oscilación completa.*

Frecuencia (f): *Número de oscilaciones por unidad de tiempo.*

5.3. Cinemática y dinámica en un MAS.

Dada la posición de un móvil, obtenemos la velocidad derivando respecto del tiempo y luego, la aceleración derivando la expresión de la velocidad.

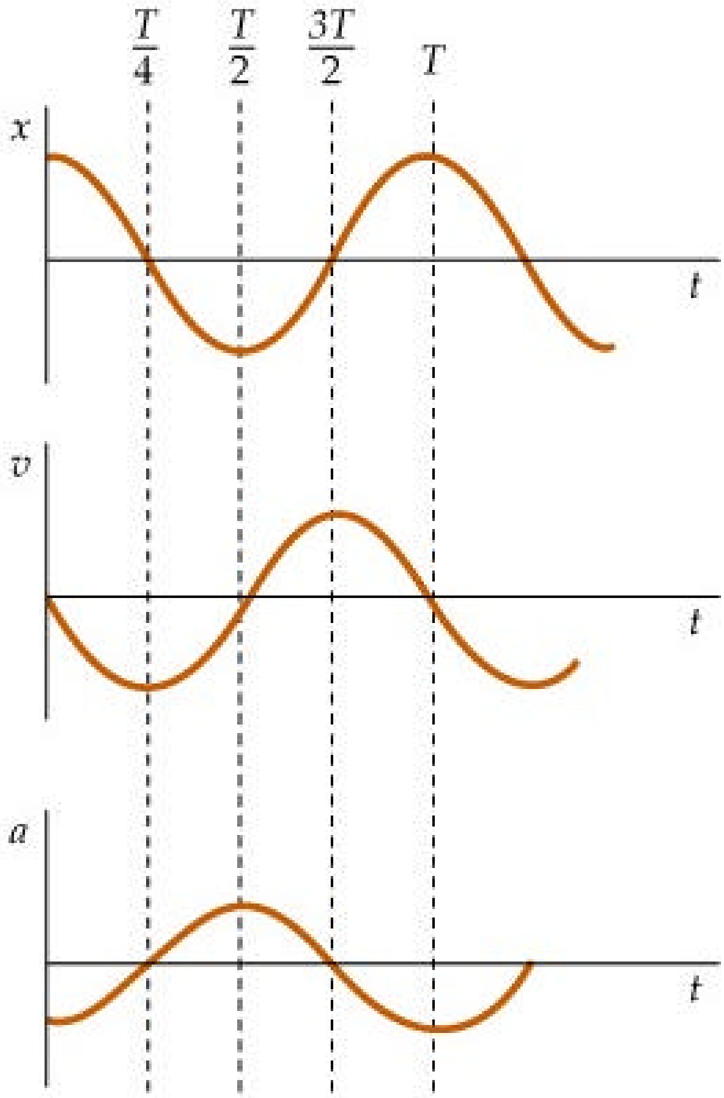
La ***posición*** del móvil que describe un M.A.S. en función del tiempo $x = A\, sen(w\, t + j\,)$



Derivando con respecto al tiempo, obtenemos la ***velocidad*** de un móvil sometido a una fuerza armónica $v = A\,\omega\cos(\omega t + \varphi)$

Derivando de nuevo respecto del tiempo, obtenemos la ***aceleración*** del móvil

$$a = -A\omega^2\, \mathrm{sen}(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$



Que si se expresa en forma de ecuación diferencial $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$, que es la ecuación diferencial de un MAS.

Es también común relacionar la velocidad v y la aceleración a con la posición x,

$$v = w\sqrt{A^2 - x^2} \qquad a = -\frac{k}{m}x$$

5.4. Fuerza y energía en el MAS.

La ***fuerza*** *que ha de actuar sobre una partícula de masa m para que oscile con un M.A.S, ha de ser proporcional al desplazamiento x* y de sentido contrario a éste ($\vec{F} = -k\,\vec{x}$).

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = -k\,\vec{x} = m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -\,m\,w^2\,x \qquad w = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2p}{T} = 2pf$$

$$T = 2p\,\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad f = \frac{1}{2p}\,\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Esto indica que si k es grande indica un muelle muy rígido, y por tanto una f alta y un T

Energía cinética

Partiendo de la relación de la energía cinética de un móvil, y de la ecuación de velocidad del M.A.S. se tiene que $E_c = \frac{1}{2}\,k\,\cos^2\,(w\;t + j\,) = \frac{1}{2}\,k\,\left(A^2 - x^2\right)$

Energía potencial

La *fuerza que actúa sobre una partícula de masa m para que oscile con un* M.A.S es conservativa (por tratarse de una fuerza central) y la energía potencial E_p correspondiente se halla $F = -\frac{dE_p}{dx} \qquad E_p = \frac{1}{2} m\,\omega^2 x^2$

Se toma como nivel cero de la energía potencial $E_p = 0$ cuando el móvil está en $x = 0$ **.**

Energía *mecánica*

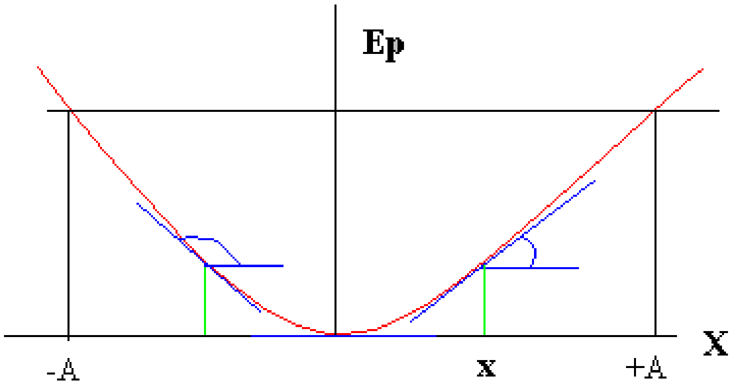
Para obtener la energía mecánica o total puesta en juego en un movimiento armónico simple *se suman las energías potencial y cinética respecto a la posición.*

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m\,v^2 + \frac{1}{2} m w^2\;x = \frac{1}{2}\,k\left(A^2 - x^2\right) + \frac{1}{2}\,k\;x^2 = \frac{1}{2}\,k\;A^2$$

En el movimiento armónico simple es un claro ejemplo de la conservación de la energía Toda la energía está dada por la fórmula $\frac{1}{2}k\;A^2$, que es la energía potencial máxima que alcanza el muelle por separarle una distancia A de su posición de equilibrio, cuando empieza el movimiento, éste va adquiriendo energía cinética a costa de su energía potencial, y cuando el móvil se encuentra en la posición de equilibrio su energía potencial es nula .

Si la partícula tiene una energía total E, la partícula solamente se moverá entre $-A$ y $+A$, siendo A la amplitud máxima del M.A.S.

Si representamos los valores de la energía total E a medida que se mueve la partícula a lo largo del eje X, la energía cinética es la parte por debajo de la línea de color rojo y la potencial la que está por encima.



5.5 El péndulo simple. M.A.S y movimiento circular uniforme.

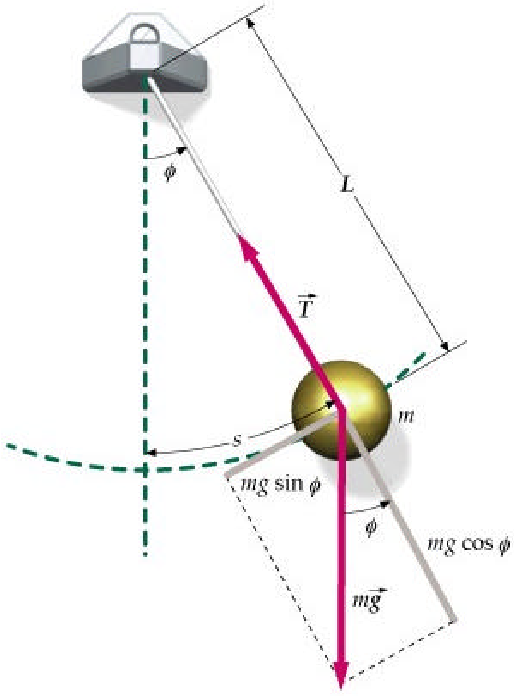
Hay sistemas que no están estrictamente sometidos a una fuerza tipo Hooke, pero que si pueden considerarse como tales, como p.e. el péndulo simple. *El péndulo es un ejemplo sencillo de MAS.* Al colocar una masa m de un hilo colgado e inextensible (y de longitud l) y desplazar ligeramente el hilo se produce una oscilación periódica. Para estudiar la oscilación se proyectan las fuerzas que se ejercen sobre la masa *m*.

Si se considera únicamente el desplazamiento tangente a la trayectoria y aplicando la segunda ley de Newton:

$$F_T = m\,\frac{d^2s}{dt^2} = -\,m\;g\;sen q = m\;l\,\frac{d^2q}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \qquad g\;sen q + l\,\frac{d^2q}{dt^2} = 0$$

La otra componente de la gravedad se contrarresta con la tensión *T*.



Esta ecuación diferencial se resuelve con la aproximación siguiente: suponiendo que la longitud l es mucho mayor que el arco s y que el desplazamiento angular q es pequeño, con lo que $sen\,q \cong q$ y la ecuación diferencial queda:

$$\frac{g}{l}q + \frac{d^2q}{dt^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad w^2 = \frac{g}{l} \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{2p}{w} = 2p\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Esta ecuación es absolutamente análoga a la de un movimiento armónico simple, y por tanto su solución también será $x = A\ \mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$, donde únicamente hay que sustituir el valor del w antiguo por el que tiene ahora para un péndulo.

Péndulo físico, real ó compuesto.

Péndulo físico: Cualquier sólido rígido cuando se cuelga de un punto que no sea su c.d.m. y se le desplaza de su posición de equilibrio, al soltarlo se comportará como un péndulo físico.

Si se aplica la segunda ley de Newton al movimiento de rotación se tiene:

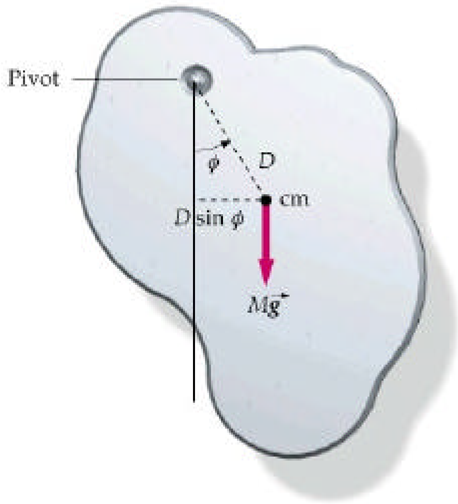
$$-M\ g\ D\ sen f = I\ a = I\ \frac{d^2 f}{d t^2}$$

y si $sen f \approx f$

$$-\frac{M\ g\ D}{I} f = a = \frac{d^2 f}{d t^2} = -w^2 f \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{M\ g\ D}{I} = w^2$$

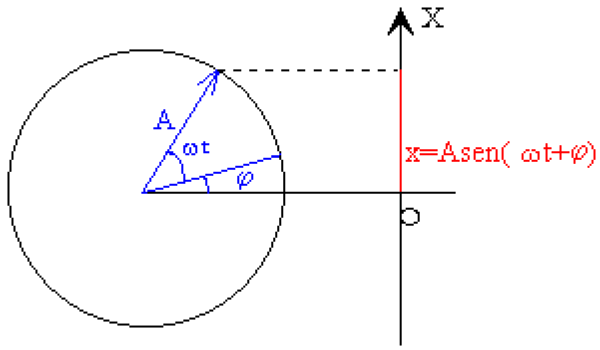
$$\Rightarrow \qquad T = \frac{2p}{w} = 2p\ \sqrt{\frac{I}{M\ g\ D}}$$



M.A.S y movimiento circular uniforme.

Un M.A.S. se puede interpretar como la proyección sobre el eje X, del extremo de un vector rotatorio de longitud igual a la amplitud A*, que gira con velocidad angular* w *igual a la frecuencia angular del M.A.S,* en el sentido contrario a las agujas del reloj.

Dicha proyección vale $x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$



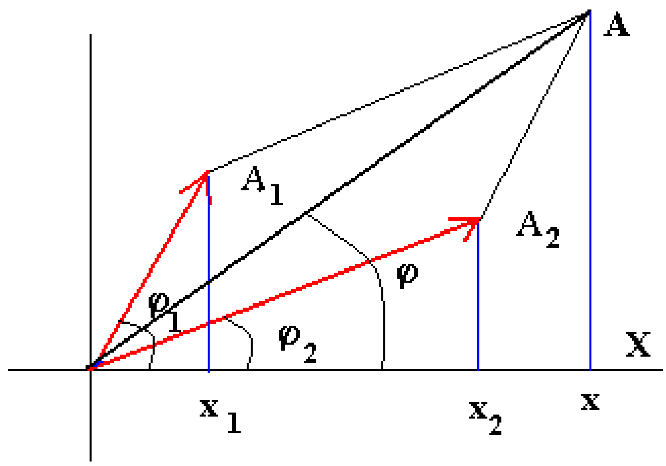
El *ángulo* $w\ t + j$ que forma el vector rotatorio con el eje de las X se denomina *fase del movimiento.* El *ángulo* j que forma en el instante $t = 0$, se denomina *fase inicial*.

5. 6 Superposición de dos MAS.

La composición de M.A.S. se basa en la relación existente entre el M.A.S y el movimiento circular uniforme y es importante para explicar la interferencia de dos movimientos ondulatorios armónicos.

Caso de igual dirección y frecuencia.

Si componemos dos M.A.S. de ***la misma dirección y frecuencia***, el primero con amplitud A_1, y fase inicial j_1 : $x_1 = A_1 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_1)$ y el segundo con amplitud A_2, y fase inicial j_2 : $x_2 = A_2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_2)$ el resultado es un M.A.S. de la misma dirección y de la misma frecuencia $x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$.



La amplitud y la fase inicial se pueden obtener sumando los vectores rotatorios que representan a cada uno de los dos M.A.S. componentes (ver figura): $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$

El valor de la amplitud resultante A y de la fase j, se obtienen a partir del sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$A\,.\cos f = A_1 \cos f_1 + A_2 \cos f_2$$
$$A\,.\,\mathrm{sen} f = A_1\,\mathrm{sen}\, f_1 + A_2\,\mathrm{sen}\, f_2$$

Si los dos M.A.S. están ***en fase***, *la diferencia de fase es cero*, la *amplitud del* M.A.S *resultante es la suma de las amplitudes de los dos* M.A.S.

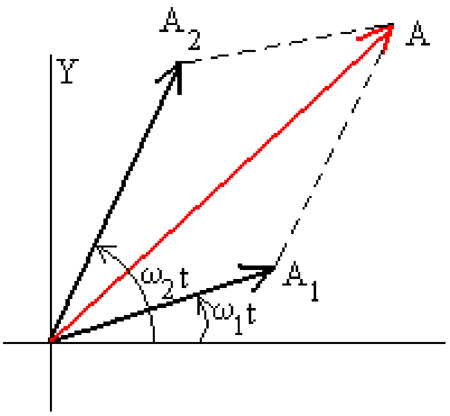
Si los dos M.A.S. están ***en oposición de fase,*** la *diferencia de fase es 180, la amplitud del* M.A.S *resultante es la diferencia de las amplitudes de los dos* M.A.S.

Caso de igual dirección y distinta frecuencia

Si componemos dos MAS ***de la misma dirección pero de distinta frecuencia angular y con la misma fase inicial***

$$x_1 = A_1\,.\,\mathrm{sen}\,(w_1 \cdot t)$$
$$x_2 = A_2\,.\,\mathrm{sen}\,(w_2 \cdot t)$$

El primer MAS es la proyección sobre el eje X de un vector de longitud A_1 que gira con velocidad angular w_1. El segundo MAS es la proyección sobre el eje X de un vector de longitud A_2 que gira con velocidad angular w_2. *El movimiento resultante no es un MAS sino un movimiento que se obtiene de la proyección sobre el eje X del vector suma vectorial de los dos vectores*: $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$



El módulo de *la amplitud resultante no tiene un valor (longitud) constante*

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\omega_1 - \omega_2)t}$$

su *valor máximo* es $A_1 + A_2$ y su *valor mínimo* es $|A_1 - A_2|$. Se dice entonces que la ***amplitud es modulada*** y a la fluctuación de la amplitud se denomina ***pulsación***.

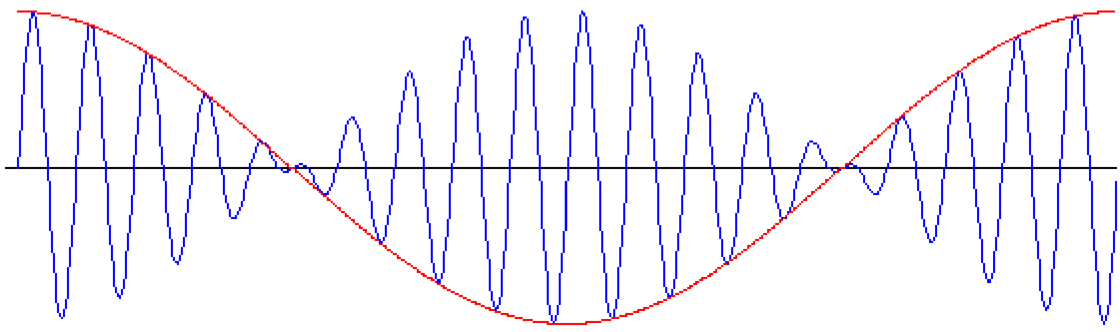
Cuando las amplitudes son iguales ($A_1 = A_2$), el MAS resultante:

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cdot \mathrm{sen}\,(w_1 \cdot t) + A_1 \cdot \mathrm{sen}\,(w_2 \cdot t)$$

$$x = 2A_1 \cos\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t \cdot \mathrm{sen}\,\tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t$$

Esta ecuación nos dice que el movimiento resultante tiene *de frecuencia angular* $(w_1 + w_2)/2$ y de *amplitud* $A = 2A_1 \cos\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t$

En la figura siguiente se muestra en color rojo ***la amplitud modulada*** *A* y en color azul la ***amplitud resultante*** *x* de la composición de los dos MAS.



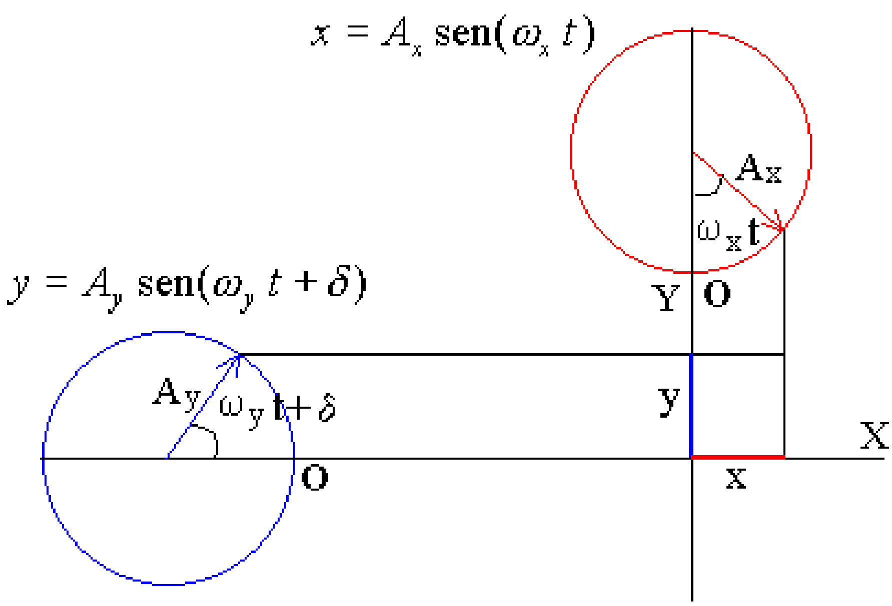
Casos de direcciones perpendiculares.

La composición de dos M.A.S. de direcciones perpendiculares se obtiene , de nuevo, a través de la relación existente el M.A.S y el movimiento circular uniforme.

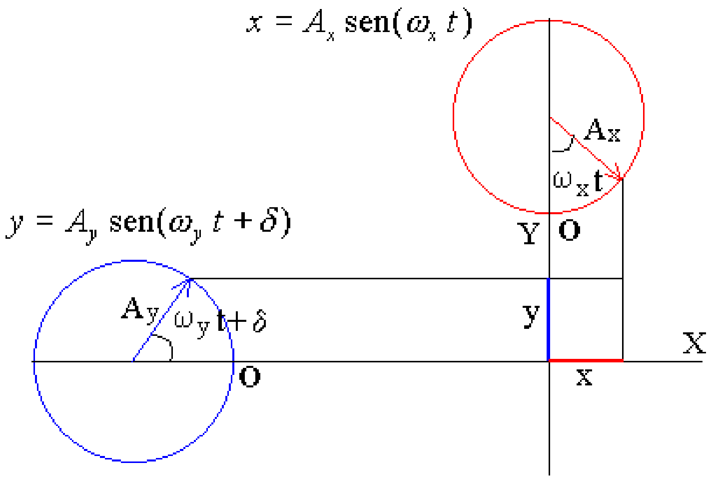
Sean dos M.A.S de direcciones perpendiculares, de amplitudes A_x y A_y, frecuencias angulares w_x y w_y, respectivamente, y con una diferencia de fase *d* entre ambos movimientos dados por las ecuaciones

$$x = A_x \sin(\omega_x t) \qquad y = A_y \sin(\omega_y t + \delta)$$

El primer M.A.S. *se representa proyectando el extremo del vector rotatorio* A_x *sobre el eje* X, el segmento marcado en color rojo. Al girar con velocidad angular w_x, al cabo de un cierto tiempo *t*, su posición angular es $w_x\, t$. El origen de ángulos se encuentra en la parte derecha de la circunferencia en el punto marcado por O.



El segundo M.A.S. *se representa proyectando el extremo del vector rotatorio* A_y *sobre el eje* Y, el segmento marcado en color azul. Al girar con velocidad angular w_y, al cabo de un cierto tiempo t, su posición angular es $w_y t + d$. El origen de ángulos se encuentra en la parte inferior de la circunferencia en el punto marcado por O y d es la posición angular de partida en el instante $t = 0$.



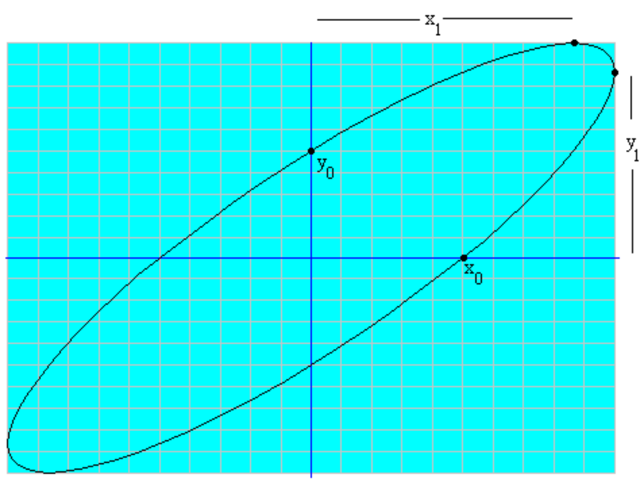
Figuras de Lissajous.

Se denominan ***figuras de Lissajous***, las *trayectorias del movimiento resultante de componer dos M.A.S. de direcciones perpendiculares*, que dependen de la relación de frecuencias angulares w_x / w_y y de la diferencia de fase d.

Sean ***dos MAS de direcciones perpendiculares y de la misma frecuencia angular*** ω, *desfasados* δ y que tienen la misma amplitud A.

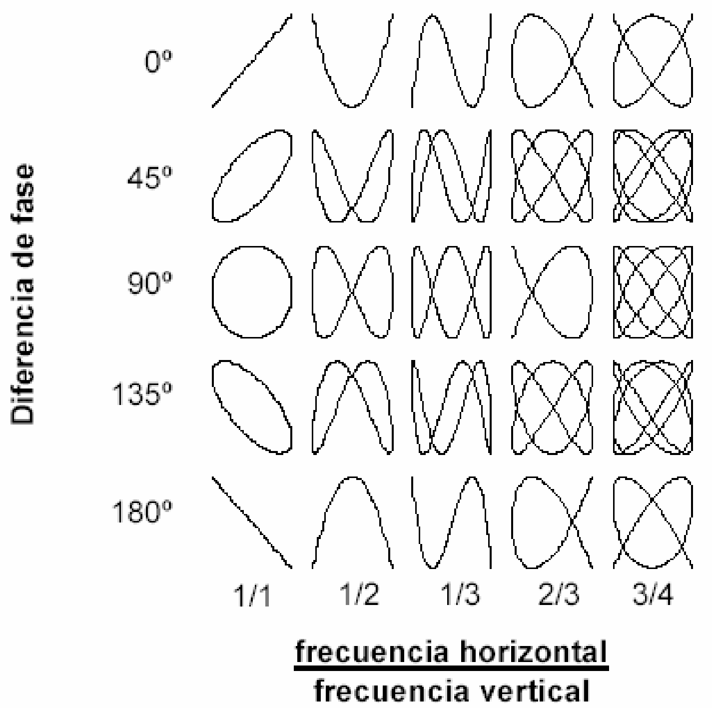
$$x = A \cdot \text{sen}\,(w \,.\, t) \qquad\qquad y = A \cdot \text{sen}\,(w \cdot t + d\,)$$

La trayectoria como podemos comprobar es una elipse. La medida de la intersección de la elipse con los ejes X e Y nos permite medir el desfase d , entre dos señales x e y.



Cuando $x = 0$, entonces $w \cdot t = 0$, ó p; $y_0 = A \cdot \text{sen} d$; $y_0 = A \cdot \text{sen}\ (\pi + d) = - A \cdot \text{sen} d$

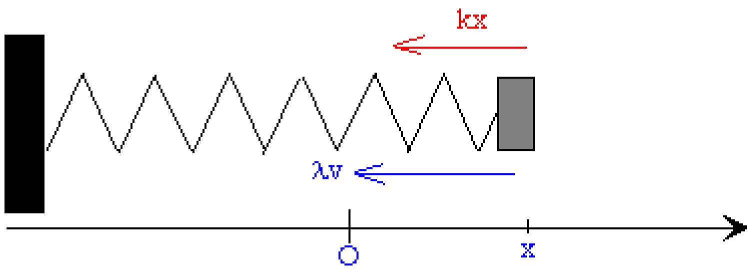
Si medimos en la parte positiva del eje Y, tendremos que $\text{sen}\, d = y_0 / A$



Figuras de Lissajous para diversas relaciones de frecuencia y fase

5.7 Oscilaciones amortiguadas.

La experiencia nos demuestra que *la amplitud de un cuerpo vibrante* tal como un resorte o un péndulo, *decrece gradualmente hasta que se detiene debido al* ***amortiguamiento***, ya que *además de la fuerza elástica* $F = - k\, x$ (que tiende a restaurar al cuerpo a su posición de equilibrio), *actúa otra fuerza de rozamiento* proporcional a la velocidad y de sentido contrario a ésta $F_r = - l\ v$, donde l es una constante que depende del sistema físico considerado.



La ecuación del movimiento se escribe $ma = -kx - \lambda v$

Si se tiene en cuenta que la aceleración es la derivada segunda de la posición x, y la velocidad es la derivada primera de x, la ***ecuación del movimiento*** es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{y} \quad 2\gamma = \frac{\lambda}{m}$$

donde $w_0^2 = k / m$ es la *frecuencia propia o natural* del sistema oscilante y $g = l/(2m)$ es la *constante de amortiguamiento.*

La solución de la ecuación diferencial es

$$x = A\exp(-\gamma t)\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi) \qquad \text{con} \qquad \omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\gamma A\cdot\exp(-\gamma t)\cdot\mathrm{sen}(\omega t + \varphi) + A\cdot\exp(-\gamma t)\cdot\omega\cdot\cos(\omega t + \varphi)$$

Lo que nos da la características esenciales de las oscilaciones amortiguadas:

- *La amplitud de la oscilación disminuye exponencialmente con el tiempo*.
- *La energía del oscilador también disminuye*, debido al trabajo de la fuerza F_r de rozamiento viscoso opuesta a la velocidad.
- En *el espacio de las fases* (v-x) *el móvil describe una espiral que converge hacia el origen.*

Si el ***amortiguamiento es grande***, g puede ser mayor que w_0, y *w puede llegar a ser cero* (***oscilaciones críticas***) *o imaginario* (***oscilaciones sobreamortiguadas***). En ambos casos, no hay oscilaciones y la partícula se aproxima gradualmente a la posición de equilibrio. La energía que pierde la partícula que experimenta una oscilación amortiguada es absorbida por el medio que la rodea.

La posición inicial x_0 y la velocidad inicial v_0 determinan la amplitud A y la fase inicial j. Para $t = 0$, $x_0 = A \cdot \mathrm{sen} j$ $v_0 = - Ag \cdot \mathrm{sen} j + A\, w \cdot \cos j$

En este sistema de dos ecuaciones se despeja A y j a partir de los datos de x_0 y v_0

Oscilaciones amortiguadas ($g < w_0$)

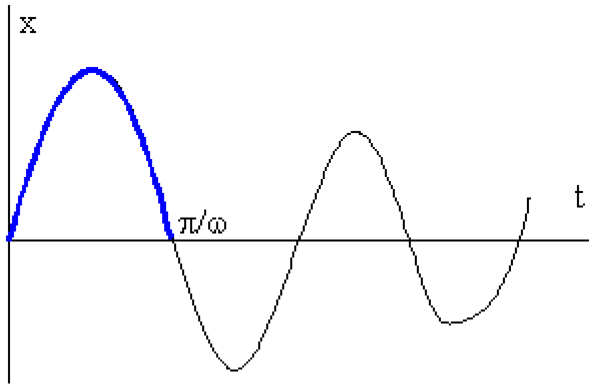
$$x = A\cdot e^{-\gamma \cdot t}\cdot \mathrm{sen}(\omega t + \phi) \qquad \text{con} \qquad \omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\gamma A e^{-\gamma t}\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi) + \omega A e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \phi)$$

Las condiciones iniciales determinan los valores de la amplitud inicial A y de la fase inicial f. En nuestro caso son: $t = 0, x = 0$, y $v = v_0$.

$$x = \frac{v_0}{\omega} \cdot e^{-\gamma \cdot t} \operatorname{sen}(\omega \cdot t) \qquad v = -\gamma \frac{v_0}{\omega} e^{-\gamma t} \operatorname{sen}(\omega t) + v_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t)$$

Esta ecuación nos da la posición del cuerpo en función del tiempo, cuya representación gráfica es:



Oscilación crítica ($g = w_0$)

La solución de la ecuación diferencial es: $x = (A \cdot t + B) e^{-\gamma \cdot t}$

Si las condiciones iniciales son: $t = 0$, $x = 0$, $v = v_0$, se transforma en:

$$x = v_0 \cdot t \cdot e^{-\gamma \cdot t}$$

Oscilación sobreamortiguada ($g > w_0$)

La solución de la ecuación diferencial es:

$$x = \left(A \cdot e^{-\beta \cdot t} + B \cdot e^{\beta t}\right) \cdot e^{-\gamma \cdot t} \quad \text{con} \quad \beta^2 = \gamma^2 - \omega_0^2$$

y con las condiciones iniciales anteriores: $x = \frac{v_0}{\beta} \cdot e^{-\gamma \cdot t} \cdot Sh(\beta \cdot t)$

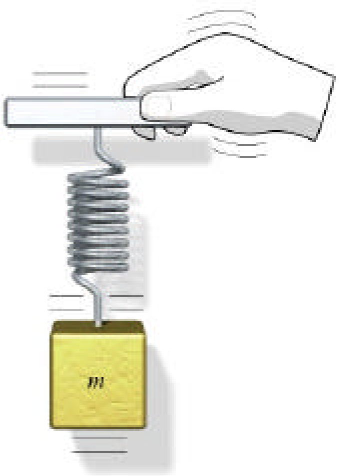
5.8. Oscilaciones forzadas y resonancia.

Si *aplicamos al oscilador amortiguado una fuerza externa* oscilante $F_0 \cdot \cos(w_f t)$, donde w_f es la frecuencia angular de dicha fuerza. La ecuación del movimiento de la partícula es:

$$ma = -kx - \lambda v + F_0 \cos(\omega_f t)$$

y la ecuación del movimiento en forma de ecuación diferencial es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_f t) \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{y} \quad 2\gamma = \frac{\lambda}{m}$$



La solución de esta ecuación diferencial es la suma de dos términos:

- el estado transitorio que depende de las condiciones iniciales y que desaparece al cabo de cierto tiempo, teóricamente infinito.
- el estado estacionario, independiente de las condiciones iniciales, y que es el que permanece, después de desaparecer el estado transitorio.

Una *solución particular* de la ecuación diferencial completa es de la forma

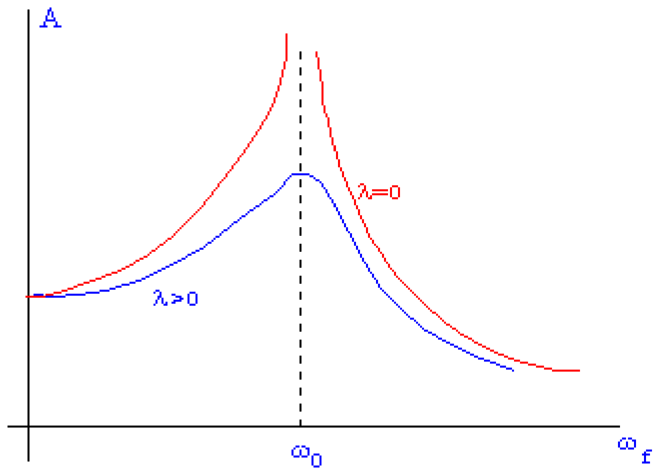
$$x = A\,\text{sen}(\omega_f t + \delta)$$

Los valores de *A* y ***d*** se obtienen de la ecuación diferencial lineal completa

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{\left(\omega_f^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\omega_f^2\gamma^2}} \qquad \text{y} \qquad \text{tg}\,\delta = \frac{\omega_f^2 - \omega_0^2}{2\gamma\omega_f}$$

La *respuesta en amplitud de la* ***oscilación forzada***, en el estado estacionario, se puede observar (a partir de la fórmula o de la gráfica) que *disminuye rápidamente cuando la frecuencia* w_f *de la fuerza oscilante se hace mayor o menor que la frecuencia propia del oscilador* w_0 .

En el caso ideal *de que no existiese rozamiento, la amplitud de la oscilación forzada se haría muy grande*, tendería a infinito, cuando la frecuencia w_f de la fuerza oscilante es igual a la frecuencia propia del oscilador w_0.



En el *caso habitual de que exista rozamiento (l > 0), la amplitud se hace máxima cuando la frecuencia w_f de la fuerza oscilante es próxima a la natural del oscilador w_0 .*

La ***característica esencial del estado estacionario***, es que *la velocidad de la partícula está en fase d = 0 con la fuerza oscilante cuando la frecuencia de la fuerza oscilante w_f es igual a la frecuencia propia del oscilador w_0*

$$v = \frac{dx}{dt} = A\,\omega_f \cos(\omega_f t + \delta)$$

El *valor medio de la energía por unidad de tiempo suministrada por la fuerza oscilante* es el trabajo medio realizado por dicha fuerza por unidad de tiempo (o potencia) es : $P_1 = \langle F_0 \cos(\omega_f t) \cdot v \rangle$

El *valor medio de la energía por unidad de tiempo que disipa el oscilador* a causa de su interacción con el medio que le rodea (o potencia) es : $P_2 = \langle \lambda v \cdot v \rangle$

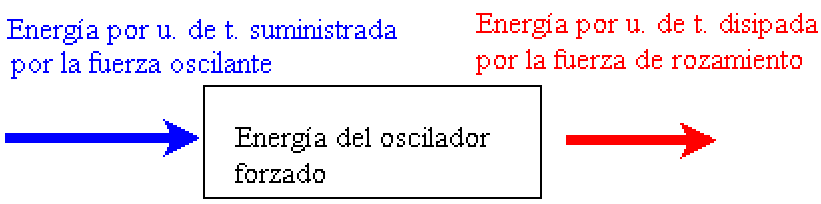
En el ***estado estacionario***

$$X = \quad A \cdot \text{sen}(?_f t + d)$$

$$V = A \cdot ?_f \cdot \cos(?_f t + d)$$

Haciendo algunas operaciones, se obtiene la misma expresión para P_1 y para P_2.

$$P_1 = P_2 = \frac{F_0^2 \gamma \omega_f^2 / m}{\left(\omega_f^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\gamma^2 \omega_f^2}$$



*En el **estado estacionario**, el valor medio de la energía por unidad de tiempo suministrada por la fuerza oscilante, es igual al valor medio de la energía por unidad de tiempo que disipa el oscilador* a causa de su interacción con el medio que le rodea. Manteniéndose la energía del oscilador forzado constante en valor medio.

La expresión anterior la podemos escribir de una forma más simple

$$P = \frac{F_0^2}{4m\gamma^2}\left(\frac{1}{1+X^2}\right) \quad \text{con} \quad X = \text{tg}\ \delta = \frac{\omega_f^2 - \omega_0^2}{2\gamma\omega_f}$$

Cuando la frecuencia w_f de la fuerza oscilante es igual a la frecuencia w_0 natural del oscilador la fuerza oscilante F_0 · cos *(w_f t) y la velocidad v del oscilador están en fase,* $d = 0$, *el valor medio de la energía por unidad de tiempo P suministrada por la fuerza oscilante es máxima*. Esta situación recibe el nombre de ***resonancia***.

La representación de la potencia *P* en función de *X* tiene la forma de la curva acampanada de la figura. El máximo de la potencia *P* se obtiene para *X = 0*, o bien, cuando la frecuencia w_f de la fuerza oscilante es igual a la frecuencia w_0 natural del oscilador. Vemos también que la función es simétrica, tiene el mismo valor para *X* positivos y *X* negativos, y que *P* tiende rápidamente a cero a medida que *X* se hace mayor o menor que cero, es decir, a medida que la frecuencia w_f de la fuerza oscilante se hace mayor o menor que la frecuencia w_0 propia del oscilador.