

**PROBLEMAS DE TOPOLOGÍA**  
Licenciatura de Matemáticas, curso 2003-04

**Espacios topológicos**

- 1.- Sea  $X$  un conjunto con una métrica  $d$ . Definimos otra métrica  $d'$  en  $X$  como  $d'(x, y) = \lambda d(x, y)$ , donde  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 0$ . Demostrar que  $d$  y  $d'$  inducen la misma topología en  $X$ .
- 2.- Sobre un conjunto  $X$ , consideremos  $\tau = \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ es numerable}\} \cup \{\emptyset\}$ . Comprobar que  $\tau$  es una topología (es la llamada topología conumerable).
- 3.- Consideremos la clase  $\tau = \{\mathbb{R}^2, \emptyset\} \cup \{G_k; k \in \mathbb{R}\}$  de subconjuntos del plano  $\mathbb{R}^2$ , donde  $G_k = \{(x, y) \mid x > y + k\}$ .
- (a) Demostrar que  $\tau$  es una topología en  $\mathbb{R}^2$ .
- (b) ¿Es  $\tau$  una topología sobre  $\mathbb{R}^2$  si sustituimos “ $k \in \mathbb{R}$ ” por “ $k \in \mathbb{Z}$ ”? ¿Y si lo cambiamos por “ $k \in \mathbb{Q}$ ”? (Indicación: Para el último caso usar el hecho de que  $\mathbb{Q}$  no es completo).
- 4.- Consideremos  $\mathbb{R}^2$  con la topología usual. Decidir cuales de los siguientes subconjuntos son abiertos, cuales son cerrados, y cuales no son ni abiertos ni cerrados:
- (i)  $\{(x, y) \mid |x + y| < 1\}$ .                      (iv)  $\{(x, y) \mid x = y, x \neq 0\}$ .  
(ii)  $\{(x, y) \mid |x + y| \leq 1\}$ .                      (v)  $\{(x, y) \mid x^4 + y^4 < 1\}$ .  
(iii)  $\{(x, y) \mid xy \geq 0\}$ .                              (vi)  $\{(x, y) \mid |x| > 1\} \cup \{(x, y) \mid y = 0\}$ .

5.- Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos de un espacio topológico  $X$ . Demostrar que:

- (i)  $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$ ;                      (iv)  $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ ;                      (vii)  $\overline{\overline{X - A}} = \overset{\circ}{X - A}$ ;  
(ii)  $\overline{\overset{\circ}{A \cap B}} = \overset{\circ}{\overline{A}} \cap \overset{\circ}{\overline{B}}$ ;                      (v)  $\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ;                      (viii)  $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$ ;  
(iii)  $\overline{\overline{A \cup B}} \supset \overset{\circ}{\overline{A}} \cup \overset{\circ}{\overline{B}}$ ;                      (vi)  $\overline{\overline{A \cap B}} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ ;                      (ix)  $\partial(\partial(\partial A)) = \partial(\partial A) \subset \partial A$ ;

y comprobar que estos son los mejores resultados posibles.

- 6.- (a) Sea  $p > 0$  un número primo. Sea  $d: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como sigue: dados  $m, n \in \mathbb{Z}$ , si  $m = n$ , entonces  $d(m, n) = 0$  y en otro caso  $d(m, n) = 2^{-k}$  donde  $|m - n| = p^k r$  para ciertos  $k, r \in \mathbb{Z}$  tal que  $p$  no divide a  $r$ . Demostrar que  $d$  es una métrica sobre  $\mathbb{Z}$  (denominada métrica  $p$ -ádica).
- (b) Definimos  $A_\alpha(n) = \{n + \lambda p^\alpha, \lambda \in \mathbb{Z}\}$ . Demostrar que  $\{A_\alpha(n)\}$  es una base de la topología inducida por la métrica  $p$ -ádica.

- 7.- Demostrar que todo espacio topológico  $X$  que sea  $2^\circ$  numerable es separable. (El recíproco no es cierto, ver el problema siguiente).
- 8.- Sea  $X$  un conjunto no numerable, y fijemos un punto  $x_0 \in X$ . Consideremos la familia de subconjuntos  $\tau = \{\mathcal{U} \mid \mathcal{U} = \emptyset \text{ o bien } x_0 \in \mathcal{U}\}$ . Demostrar que:
- $(X, \tau)$  es un espacio topológico.
  - Si  $\mathcal{U}$  es un abierto diferente del vacío, entonces  $\overline{\mathcal{U}} = X$ .
  - Si  $C$  es un cerrado diferente de  $X$ , entonces  $\overset{\circ}{C} = \emptyset$ .
  - $X$  es separable, pero no tiene ninguna base numerable de abiertos.
- 9.- Sea  $\mathcal{A}$  un recubrimiento de  $X$ . Demostrar que en cada uno de los casos siguientes, una aplicación  $f: X \rightarrow Y$  es continua si y sólo si es continua restringida a cada  $A \in \mathcal{A}$ :
- $\mathcal{A}$  es un recubrimiento por abiertos.
  - $\mathcal{A}$  es un recubrimiento por cerrados finito.
  - $\mathcal{A}$  es un recubrimiento por cerrados localmente finito (todo punto de  $X$  tiene un entorno que corta a un número finito de elementos de  $\mathcal{A}$ ).

### Construcciones de espacios topológicos <sup>1</sup>

- 10.- Demostrar que  $S^n - \{\text{polo norte}\}$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  con la topología usual. (Indicación: utilizar la proyección estereográfica.)
- 11.- Demostrar que existen homeomorfismos
- $S^n \cong \partial I^{n+1}$ ;
  - $D^n \cong I^n$ ;
  - $D^n \times D^m \cong D^{n+m}$ .
- 12.- Demostrar que:
- El anillo cerrado  $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \|x\| \leq 2\}$  es homeomorfo al cilindro  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, 0 \leq x_3 \leq 1\}$ .
  - $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \cong S^1 \times \mathbb{R}$  y, en general,  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \cong S^{n-1} \times \mathbb{R}$ .

---

<sup>1</sup>En varios de los problemas que proponemos en esta sección se podrá utilizar un resultado de teoría (que demostraremos más adelante) que nos asegura que toda biyección continua de un compacto en un Hausdorff es un homeomorfismo. La demostración usa las propiedades siguientes: todo subespacio cerrado de un compacto es compacto, el cociente de un compacto es compacto, todo subespacio de un Hausdorff es Hausdorff y, finalmente, que todo subespacio compacto de un Hausdorff es cerrado.

**13.-** Diremos que un subespacio  $A \subset X$  es un *retracto* de  $X$  si y sólo si existe una aplicación continua  $r: X \rightarrow A$  tal que  $r(a) = a$  para todo  $a \in A$ . A una tal  $r$  se le llama *retracción*. Demostrar que:

- (a)  $D^n$  es un retracto de  $\mathbb{R}^n$ .
- (b)  $S^{n-1}$  es un retracto de  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ .
- (c)  $S^1$  es un retracto del cilindro y de la banda de Möbius.

Un retracto  $A \subset X$  con retracción  $r: X \rightarrow A$ , se dice que es un retracto de deformación (fuerte) si existe una aplicación continua

$$H: X \times I \rightarrow X,$$

tal que  $H(x, 0) = x$ ,  $H(x, 1) = r(x)$  para todo  $x \in X$  y  $H(a, t) = a$  para todo  $a \in A$ ,  $t \in I$ . Probar que los ejemplos anteriores son retractos de deformación<sup>2</sup>.

**14.-** La *unión puntual*  $X \vee Y$  de dos espacios topológicos por los puntos  $x_0 \in X$  e  $y_0 \in Y$  es el subespacio de  $X \times Y$  formado por aquellos puntos de la forma  $(x_0, y)$  o  $(x, y_0)$ . Probar que  $S^1 \vee S^1$  es homeomorfo al subespacio de  $\mathbb{R}^2$  formado por la unión de las circunferencias de radio 1, centradas en  $(1, 0)$  y  $(-1, 0)$ .

**15.-** Recordar que el cociente de un espacio  $X$  por un subespacio  $A$  es  $X/A := X/\sim$  donde  $x \sim y$  si y sólo si  $x, y \in A$ .

- (a) Sea  $A_n \subset S^1$  el conjunto formado por las soluciones complejas de la ecuación  $z^n = 1$ , donde  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \geq 2$ . Calcular  $S^1/A_n$ .
- (b) Sea  $A$  la unión de los conjuntos  $A_n$  para  $n \geq 2$ . Demostrar que todos los abiertos no vacíos de  $S^1/A$  tienen un punto en común.

**16.-** Demostrar que  $D^n/S^{n-1} \cong S^n$ .

**17.-** Recordemos que  $\mathbb{R}P^n = (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\sim$ , donde  $(x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n)$  si y sólo si existe  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 0$ , tal que  $x_i = \lambda y_i$  para  $i = 0, \dots, n$ . Demostrar que:

- (a)  $\mathbb{R}P^n \cong S^n/\sim$ , donde  $x \sim \pm x$ .
- (b)  $\mathbb{R}P^n \cong D^n/\sim$ , donde  $x \sim y$  si y sólo si  $x = y$  o bien  $x$  e  $y$  son puntos antipodales de  $S^{n-1} = \partial D^n$ .
- (c)  $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$ .

**18.-** Consideremos la acción  $\mu: (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\mu((m, n), (x, y)) = (m + x, n + y)$ . Demostrar que  $\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$  es homeomorfo al toro.

<sup>2</sup>La página de Neil Strickland <http://www.shef.ac.uk/~pm1nps/courses/algtop> contiene algunas animaciones interesantes realizadas con Mathematica que ilustran este tipo de deformaciones.

19.- Sea  $X$  la banda infinita  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1/2 \leq y \leq 1/2\}$  de  $\mathbb{R}^2$ , sobre la cual actúa  $\mathbb{Z}$  como  $m \cdot (x, y) = (m + x, (-1)^m y)$ . Demostrar que  $X/\mathbb{Z}$  es homeomorfo a la banda de Möbius.

20.- Representemos  $S^2$  como  $D^+ \cup C \cup D^-$ , donde

$$\begin{aligned} D^+ &= \{(x, y, z) \in S^2 \mid z \geq 1/2\} \\ D^- &= \{(x, y, z) \in S^2 \mid z \leq -1/2\} \\ C &= \{(x, y, z) \in S^2 \mid -1/2 \leq z \leq 1/2\} \end{aligned}$$

y consideremos la proyección  $p: S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ . Demostrar que  $C$  es homeomorfo a  $S^1 \times I$  y que  $p(C)$  es homeomorfo a la banda de Möbius.

21.- Sabemos si un grupo  $G$  actúa sobre un espacio  $X$ , la proyección  $X \rightarrow X/G$  es abierta. Probar que en general no tiene por qué ser cerrada. (Ayuda: considerar  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  actuando sobre la recta real como  $q \cdot x = q + x$  y ver que la proyección  $\pi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Q}$  no es cerrada.)

### Compacidad y espacios de Hausdorff

22.- Demostrar que la gráfica de una función  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  es compacta si y sólo si  $f$  es continua. Dar un ejemplo de una función discontinua  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  con gráfica cerrada pero no compacta.

23.- Demostrar que la imagen por una aplicación continua de un espacio localmente compacto no es siempre localmente compacto. (Sabemos por teoría que sí lo es si lo es si la aplicación es abierta.)

24.- Demostrar que la compactificación de Alexandrov  $(\mathbb{R}^n)^\infty$  es homeomorfa a la esfera  $S^n$ .

25.- Sea  $X = (0, 1) \cup (2, 3)$ . Comprobar que  $X^\infty \cong S^1 \vee S^1$ .

26.- Demostrar que la intersección de dos compactos puede no ser compacta, pero que toda intersección de compactos cerrados es compacta y cerrada.

27.- Demostrar que compacto no implica localmente compacto.

28.- Sean  $X_1$  y  $X_2$  dos espacios topológicos y sean  $K_i \subset X_i$ ,  $i = 1, 2$ , subespacios compactos. Demostrar que todo entorno de  $K_1 \times K_2$  en  $X_1 \times X_2$  contiene un entorno de la forma  $U_1 \times U_2$  con  $K_i \subset U_i$  abierto para  $i = 1, 2$ .

29.- Sea  $f: X \rightarrow Y$  continua y exhaustiva, con  $X$  compacto e  $Y$  Hausdorff. Demostrar que  $Y$  tiene la topología cociente determinada por  $f$ ; es decir,  $U \subset Y$  es abierto si y sólo si  $f^{-1}(U)$  es abierto.

30.- Demostrar que  $Y$  es Hausdorff si y sólo si  $\Delta_Y = \{(y, y) \in Y \times Y\}$  es un cerrado de  $Y \times Y$ .

31.- Demostrar que todo retracto de un espacio Hausdorff  $X$  es cerrado. (Ayuda: Usar la aplicación  $X \rightarrow X \times X$  dada por  $x \mapsto (x, r(x))$ , donde  $r$  es la retracción).

- 32.-** Sea  $f: X \rightarrow Y$  continua. Demostrar que si  $Y$  es Hausdorff, entonces  $\Delta_f = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid f(x_1) = f(x_2)\}$  es un cerrado de  $X \times X$ .
- 33.-** Sea  $X$  compacto y Hausdorff, y sea  $Y$  el espacio cociente determinado por una cierta aplicación  $f: X \rightarrow Y$ . Demostrar que:
- (a)  $Y$  es Hausdorff si y sólo si  $f$  es cerrada.
  - (b)  $Y$  es Hausdorff si y sólo si  $\Delta_f$  es cerrado.
- 34.-** Demostrar que los espacios  $X = \mathbb{R}/(0, 1)$  y  $Y = \mathbb{R}/[0, 1]$  no son homeomorfos. (Indicación: Demostrar que  $Y \cong \mathbb{R}$  y por tanto Hausdorff y sin embargo  $\mathbb{R}/(0, 1)$  no es Hausdorff.)
- 35.-** Sea  $\mathcal{U}$  un abierto propio de  $X$ . Demostrar que si  $X$  es compacto y Hausdorff, entonces  $\mathcal{U}^\infty \cong X/(X - \mathcal{U})$ . Deducir que si  $x \in X$ , entonces  $(X - \{x\})^\infty \cong X$ .
- 36.-** Demostrar que todo subespacio denso y localmente compacto de un espacio Hausdorff es abierto.

### Conexión

- 37.-** Demostrar que un subconjunto de  $\mathbb{R}$  es conexo si y sólo si es un intervalo o un punto. (Un subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}$  diremos que es un intervalo si contiene al menos dos puntos diferentes, y si dados  $a, b \in A$  con  $a < b$  y un punto  $x$  tal que  $a < x < b$ , se cumple  $x \in A$ .)
- 38.-** Sea  $A$  un subespacio conexo de  $X$  y supongamos que  $A \subseteq Y \subseteq \bar{A}$ . Demostrar que  $Y$  es conexo.
- 39.-** Demostrar que no existe ninguna función continua  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  para la cual  $x \in \mathbb{Q}$  si y sólo si  $f(x) \notin \mathbb{Q}$ .
- 40.-** Supongamos que  $Y_0$  e  $\{Y_j, j \in J\}$  son subespacios conexos de un espacio  $X$ . Demostrar que si para todo  $j \in J$  se cumple  $Y_0 \cap Y_j \neq \emptyset$ , entonces el espacio  $Y = Y_0 \cup (\cup_{j \in J} Y_j)$  es conexo.
- 41.-** Demostrar que si  $n \geq 1$ , entonces  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  es conexo. Deducir que  $S^n$  y  $\mathbb{R}P^n$  son conexos para todo  $n \geq 1$ .
- 42.-** Demostrar que, para cada uno de los pares  $A$  y  $B$  de subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  siguientes, el espacio  $A \cup B$  es conexo:
- (i)  $A = \{(x, y) \mid x = 0, -1 \leq y \leq 1\}$ ,  
 $B = \{(x, y) \mid 0 < x \leq 1, y = \sin(\pi/x)\}$ .
  - (ii)  $A = \{(x, y) \mid 1/2 \leq x \leq 1, y = 0\}$ ,  
 $B = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, y = x/n, n \in \mathbb{Z}\}$ .

- 43.- Sean  $\{C_n\}$  subconjuntos conexos y compactos de un espacio Hausdorff tales que  $C_{n+1} \subset C_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Demostrar que  $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$  es conexo.
- 44.- Dar un ejemplo de una familia de subconjuntos conexos cerrados  $C_n \subset \mathbb{R}^2$  tales que  $C_{n+1} \subset C_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , pero donde  $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$  no sea conexo.
- 45.- Dos subconjuntos  $A$  y  $B$  de un espacio topológico se llaman separados si  $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$ . Sean  $A$  y  $B$  separados,  $X$  conexo y supongamos que  $Y = X \setminus (A \cup B)$  es conexo. Demostrar que  $A \cup Y$  y  $B \cup Y$  son conexos.
- 46.- Sea  $A$  el subconjunto del plano formado por los puntos con al menos una coordenada racional. Determinar las propiedades de conexión de  $A$  y de  $\mathbb{R}^2 \setminus A$ .
- 47.- Sea  $X$  un espacio topológico y  $C$  un subespacio conexo de  $X$ . Demostrar que si para un subespacio  $E$  de  $X$  se cumple  $C \cap E \neq \emptyset$  y  $C \cap (X \setminus E) \neq \emptyset$ , entonces  $C \cap \partial E \neq \emptyset$ .
- 48.- Demostrar que, para cada uno de los pares  $A$  y  $B$  de subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  siguientes, el espacio  $A \cup B$  no es arco-conexo:
- (i)  $A = \{(x, y) \mid x = 0, -1 \leq y \leq 1\}$ ,  
 $B = \{(x, y) \mid 0 < x \leq 1, y = \sin(\pi/x)\}$ .
- (ii)  $A = \{(x, y) \mid 1/2 \leq x \leq 1, y = 0\}$ ,  
 $B = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, y = x/n, n \in \mathbb{Z}\}$ .
- 49.- Sea  $A$  un subconjunto arco-conexo de un espacio  $X$  y sea  $\{A_j, j \in J\}$  una colección de subconjuntos arco-conexos de  $X$ , donde cada uno corta a  $A$ . Demostrar que el espacio  $A \cup (\bigcup_{j \in J} A_j)$  es arco-conexo.
- 50.- Demostrar que  $S^n$  es arco-conexo para todo  $n > 0$ .
- 51.- Demostrar que  $\mathbb{R}^n$  es localmente arco-conexo.
- 52.- Demostrar que el espacio  $Y \subseteq \mathbb{R}^2$  dado por  $Y = A \cup B \cup C$ , donde
- $$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$$
- $$B = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 0, y = 0\}$$
- $$C = \{(x, y) \mid 0 < x \leq 1, y = \frac{1}{2} \sin(\pi/x)\}$$
- es arco-conexo pero no localmente arco-conexo.
- 53.- Sea  $Z = Y \cup D \subset \mathbb{R}^2$ , donde  $Y$  es como en el ejercicio anterior y  $D$  es la circunferencia  $\{(x-1)^2 + y^2 = 1\}$ . Demostrar que  $Z$  es localmente arco-conexo.
- 54.- Decidir si son ciertas o falsas las afirmaciones siguientes:
- (a) Si  $A$  es un subconjunto arco-conexo de  $X$ , entonces  $\bar{A}$  es arco-conexo.

(b) Si  $A$  y  $B$  son subconjuntos arco-conexos de  $X$  tales que  $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$ , entonces  $A \cup B$  es arco-conexo.

55.- Sean  $X$  un espacio topológico,  $A \subset X$ ,  $x \in \overset{\circ}{A}$ ,  $y \notin A$ . Demostrar que todo camino que une  $x$  con  $y$  corta a la frontera de  $A$ .

### Superficies compactas

56.- Demostrar que  $P^2 \# P^2 \# P^2 \cong P^2 \# T \cong P^2 \# K$ , donde  $T$  denota el toro y  $K$  la botella de Klein.

57.- Demostrar que toda superficie (compacta, conexa y sin borde) es homeomorfa a una de las siguientes:  $S^2 \# nT$ ,  $P^2 \# nT$  o bien  $K \# nT$ , donde  $n > 0$ .

58.- Si  $S = nT \# mP^2$ , ¿a qué superficie estándar es homeomorfa  $S$ ?

59.- Cul es la superficie representada por un decágono regular con las aristas identificadas dos a dos tal como indica el símbolo  $abcded^{-1}da^{-1}b^{-1}e^{-1}$ ?

60.- Cul es la superficie representada por un polígono de  $2n$  lados con las aristas identificadas dos a dos según el símbolo  $a_1a_2 \cdots a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \cdots a_{n-1}^{-1} a_n$ ?

61.- Hacer lo mismo si las aristas estn identificadas según el símbolo  $a_1a_2 \cdots a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \cdots a_{n-1}^{-1} a_n^{-1}$ .

62.- Clasificar las superficies siguientes:

(a)  $abcdca^{-1}bd^{-1}$ .

(b)  $aba^{-1}cdb^{-1}c^{-1}ed^{-1}e^{-1}$ .

(c)  $abcadb^{-1}efce^{-1}df^{-1}$ .

63.- Demostrar que, para toda triangulación de una superficie compacta, se cumple:

$$\begin{aligned} 3c &= 2a \\ a &= 3(v - \chi) \\ v &\geq \frac{1}{2}(7 + \sqrt{49 - 24\chi}). \end{aligned}$$

64.- Demostrar que no es posible subdividir la superficie de una esfera en regiones de manera que cada región tenga 6 lados y cada par de regiones diferentes tengan como mucho un lado en común.

65.- Demostrar que los únicos poliedros regulares son el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. (Un poliedro es regular si es homeomorfo a  $S^2$ , todas las caras tienen el mismo número de lados y en cada vértice hay el mismo número de aristas.)

**66.-** Demostrar que la característica de Euler de una superficie compacta con borde que tenga  $k$  componentes en su borde satisface  $\chi \leq 2 - k$ .

**67.-** Demostrar que toda  $n$ -variedad es localmente arco-conexa. (En particular, toda  $n$ -variedad conexa es arco-conexa.)

**68.-** Sea

124	235	346	457	561	672	713
134	245	356	467	571	612	723

la triangulación de una superficie. ¿De cuál superficie se trata?

**69.-** (a) Identifiquemos dos a dos los lados de un octógono regular de manera que se obtenga una superficie compacta. Demostrar que la característica de Euler de esta superficie es mayor o igual que  $-2$ .

(b) Demostrar que toda superficie compacta (orientable o no) con característica de Euler mayor o igual que  $-2$  se puede obtener identificando dos a dos los lados de un octógono regular.

**70.-** Clasificar las siguientes superficies con borde.

(a)  $p^{-1}rtvqpsr^{-1}$ .

(b)  $mathem^{-1}a^{-1}t^{-1}ics$ .

(c)  $acba^{-1}db^{-1}ecf$ .

**71.-** Demostrar que la suma conexa de una banda de Möbius con borde y un toro es homeomorfa a la suma conexa de una banda de Möbius con borde y una botella de Klein.

**72.-** Decir a qué superficie corresponde la siguiente triangulación

123	256	341	451
156	268	357	468
167	275	379	475
172	283	385	485.

**73.-** Demostrar que una poliedro homeomorfo a una esfera, constituido por pentágonos y hexágonos ha de tener necesariamente 12 pentágonos (como una pelota de fútbol).