Tema 4.7: Factorización de funciones holomorfas. Productos infinitos. Teorema de factorización de Weierstrass

Facultad de Ciencias Experimentales, Curso 2008-09

E. de Amo

Por un lado tenemos que la teoría local de funciones holomorfas nos ha facilitado el estudio de los ceros de una función holomorfa. Concretamente, si disponemos de una función holomorfa (no trivial) en un abierto, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, que tiene un cero en dicho abierto ($f(a) = 0$, para algún $a \in \Omega$) sabemos que

$$\exists g \in \mathcal{H}(\Omega) \text{ y } \exists k \in \mathbb{N} : f(z) = (z-a)^k g(z),$$

con $g(z) \neq 0$ para $z \in D(a, r) \subset \Omega$.

Y también, por otro lado, por el Teorema Fundamental del Álgebra, sabemos que si p es un polinomio de grado n, podemos encontrar $n+2$ números complejos, $a, a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$, tales que

$$p(z) = \prod_{k=0}^{n} a(z - a_k), \forall z \in \mathbb{C}.$$

Pues bien, si la Teoría Analítica de Funciones (a Weierstrass, gracias) nos dice que las funciones holomorfas son casi polinomios (esto es, que se pueden ver como "polinomios infinitos"), nos podemos hacer la siguiente pregunta retórica: ¿puede una función holomorfa admitir un desarrollo en serie de productos que revele explícitamente a todos sus ceros de igual suerte que ocurre con los polinomios?

Funciones como el seno, a través de su desarrollo en series de Taylor,

$$\sin(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \forall z \in \mathbb{C}$$

nos muestran expresiones mediante series de potencias que no revelan información sobre sus ceros. (Aquí sólo se aprecia que $z = 0$ es un cero de ella.) Sin embargo, esta misma función admite el desarrollo en series de productos

$$\sin(z) = z \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right), \forall z \in \mathbb{C}; \qquad (*)$$

y ahora sí que parece justificado el hecho de que el seno tenga como conjunto de sus ceros a $\pi\mathbb{Z}$.

Por tanto, este tema encuentra su justificación en la posibilidad de expresar las funciones holomorfas de una nueva forma que las caracteriza. Es decir, holomorfía y analiticidad van a encontrar una tercera expresión equivalente a ellas, vía productos infinitos.

El contenido de este tema se va a estructurar en el sentido de comenzar estudiando (la convergencia de) productos infinitos, justificaremos (entre otras) la fórmula $(*)$ anterior, y vamos a estudiar los llamados factores primarios de Weierstrass, que jugarán un papel fundamental y que nos van a permitir lograr el resultado principal de este tema: el teorema de factorización de funciones holomorfas mediante productos infinitos.

Productos infinitos.

Comenzamos con una definición que pareciera harto rebuscada, pero los ejemplos que la siguen dejarán claro que es muy natural.

Definición. Dada una sucesión (z_n) de números complejos, diremos que el producto (numérico) infinito $\prod_{n\geq 1} z_n$ converge si existe $p \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ tal que

$$Z_n := \prod_{k=1}^{n} z_k \longrightarrow p,$$

en cuyo caso, escribiremos

$$\prod_{k=1}^{+\infty} z_n := \lim Z_n = p.$$

Sea $A := \{n : z_n = 0\}$. Si $A = \emptyset$ y $Z_n \to 0$ diremos que el producto infinito diverge a 0. Si A es finito y $Z_n := \prod_{\substack{k=1\\ k\notin A}}^{n} z_k \longrightarrow p \neq 0$, diremos que el producto infinito converge a 0. En cualquier otro caso, diremos que el producto diverge (esto es, si la sucesión (Z_n) no converge o simplemente converge en $\overline{\mathbb{C}}$ a ∞).

Se hacen necesarios algunos comentarios al respecto de esta definición:

1. La noción de convergencia siempre está asociada a un comportamiento característico de la sucesión "a partir de un momento en adelante". No es así en este caso. Observemos que precisamos que todos, todos, los términos de la sucesión sean no nulos para que haya convergencia a un $p \neq 0$.

Desde esta perspectiva, se trata de un concepto poco satisfactorio si no se toma suficiente cautela. Nos referimos al hecho de que el carácter de una sucesión "no debe variar" si se modifican un número finito de sus términos; sin embargo, si no hubiésemos descartado el caso $p = 0$, tendríamos que

$$\prod_{k=0}^{+\infty} k = 0 \text{ y } \prod_{k=1}^{+\infty} k = +\infty,$$

es decir, la primera converge y la segunda no. Con la notación convenida, ambas son divergentes (aunque la primera lo sea al cero y la segunda al infinito).

2. Es más, hay un problema que metodológicamente no tendría solución: aspiramos a factorizar mediante productos infinitos de modo que se revelen los ceros "escondidos". Pues bien, la relación

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = 0,$$

nos manifiesta una situación donde no habrá tal factorización buscada. Es coherente que este caso "caiga" entre los divergentes (a 0, ¿sorprende?).

3. Con las observaciones anteriores: $\prod\limits_{n\geq 1} z_n$ converge si, y sólo si, $\prod\limits_{n\geq k+1} z_n$ converge para cualquier k, en cuyo caso

$$\prod_{n=1}^{+\infty} z_n = z_1 z_2 ... z_k \prod_{n=k+1}^{+\infty} z_n$$

(de modo que hace coherente la divergencia a cero: $0p = 0$).

4. Es elemental que, bajo tales condiciones asumidas de convergencia:

$$\begin{aligned} \left(\prod_{n=1}^{+\infty} z_n\right)\left(\prod_{n=1}^{+\infty} w_n\right) &= \prod_{n=1}^{+\infty} z_n w_n \\ \left(\prod_{n=1}^{+\infty} z_n\right)^{-1} &= \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z_n} \end{aligned}$$

Proposición. Si el producto $\prod\limits_{n\geq 1} z_n$ es convergente, entonces

$$\lim z_n = 1.$$

Demostración. Podemos suponer todos los z_n no nulos (¿por qué?). Así:

$$z_{n+1} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n+1} z_k}{\prod\limits_{k=1}^{n} z_k} \longrightarrow \frac{\prod\limits_{n=1}^{+\infty} z_n}{\prod\limits_{n=1}^{+\infty} z_n} = 1,$$

pues el producto ha de ser no nulo. **Q.E.D.**

La condición necesaria anterior de convergencia del producto ($z_n \to 1$) es manifiestamente insuficiente. Algunas de las siguientes situaciones se encargan de justificarnos esta tarea:

1. $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{1}\frac{3}{2}\frac{4}{3}...$ diverge (a $+\infty$).

2. $\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4}...$ diverge a 0.

3. $\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)$ converge (¡pruébalo encontrando Z_n!).

4. $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ converge a 0.

A la vista de la proposición anterior, se acostumbra a escribir los productos infinitos en la forma

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+z_n)\,,$$

siendo la condición necesaria, ahora, que

$$\lim z_n = 0.$$

El siguiente resultado nos muestra que una aproximación natural al estudio de los productos infinitos es el estudio de las correspondientes series que aparecen tomando logaritmos (principales) factor a factor:

Lema 1. Un producto infinito $\prod_{n\geq 1}(1+z_n)$ converge a un límite no nulo si, y sólo si, $\sum_{n\geq 1}\log(1+z_n)$ converge.

Demostración. La prueba de la suficiencia es sencilla: para cada natural k, llamemos

$$P_k := \prod_{n=1}^{k}(1+z_n) \text{ y } S_k := \sum_{n=1}^{k}\log(1+z_n)\,.$$

Si $S_k \longrightarrow S$, entonces $P_k = e^{S_k} \longrightarrow e^S \neq 0$.

Recíprocamente, la condición también es necesaria. Esto requiere un poco más de cuidado. Supongamos que

$$P_k \longrightarrow P \neq 0.$$

Observemos en primer lugar que, de esta relación de convergencia, se sigue que

$$\lim \prod_{n=1}^{k}(1+|z_n|) = |P| \neq 0,$$

y aplicando el logaritmo real

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\log(1+|z_n|) = \ln|P|\,. \qquad [1]$$

Luego para cumplir con el objetivo basta probar que la serie (real, también)

$$\sum_{n\geq 1} \arg(1+z_n) \qquad [2]$$

converge, pues [1] y [2] son las partes real e imaginaria, repectivamente, de la serie que queremos converja.

Sea $\phi_k := \arg_\omega \prod_{n=1}^{k}(1+z_n)$, donde el argumento considerado es una determinación continua en un entorno de P. Esta sucesión (ϕ_k) converge a $\arg_\omega P$. Como, por otra parte, el argumento de un producto es la suma de los argumentos de los factores, podemos afirmar que

$$\sum_{n=1}^{k} \arg(1+z_n) \in \ \mathrm{Arg} \prod_{n=1}^{k}(1+z_n)\,.$$

Ahora bien, como dos argumentos se diferencian en un múltiplo de 2π, ha de existir una sucesión de enteros (m_k) tal que

$$\phi_k = 2m_k\pi + \sum_{n=1}^{k} \arg(1+z_n)\,.$$

¿Qué nos resta? Probar que esta sucesión de enteros encontrada es constante (salvo, quizás, en un número finito de sus términos), pues así resultaría

$$\sum_{n=1}^{k} \arg(1+z_n) = \phi_k - 2m_k\pi \longrightarrow \arg_\omega P - 2m\pi,$$

y completaríamos la argumentación.

La convergencia del producto infinito nos dice que $z_n \longrightarrow 0$, es decir $1+z_n \longrightarrow 1$. Por tanto, a partir de un determinado momento

$$|\arg(1+z_n)| < \pi.$$

Y, por otro lado, la sucesión de diferencias

$$\left|\phi_{k+1}-\phi_k\right| = |\arg(1+z_{k+1}) + 2\pi(m_{k+1}-m_k)|$$

es nula; es decir, menor que π a partir de un determinado momento. Conclusión, como

$$|\arg(1+z_{k+1}) + 2\pi(m_{k+1}-m_k)| < \pi \text{ y } |\arg(1+z_{k+1})| < \pi,$$

se sigue, obligadamente, que para los enteros m_{k+1} y m_k ha de verificarse

$$|m_{k+1}-m_k| < 1,$$

luego coinciden, a partir de un momento en adelante. Esto concluye la prueba. **Q.E.D.**

Probamos a continuación un lema que nos sugiere el concepto, muy útil, de producto absolutamente convergente.

Lema 2. Sean $a_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$; entonces, son equivalentes:

i. $\prod_{n\geq 1} (1 + a_n)$ converge

ii. $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge

Demostración. Todo se basa en que $x \geq 0 \implies 1 + x \leq e^x$, pues entonces, razonando para cada natural n :

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \leq (1 + a_1)(1 + a_2) ... (1 + a_n) \leq e^{a_1 + a_2 + ... + a_n}. \quad \blacksquare$$

Otra forma de demostrarlo (ahora sin prejuicios sobre la naturaleza de los escalares a considerar), es la siguiente. Como

$$\lim_{z \longrightarrow 0} \frac{\log(1 + z)}{z} = 1,$$

para $\varepsilon > 0$, podemos razonar con z conveniente, que

$$(1 - \varepsilon)|z| < |\log(1 + z)| < (1 + \varepsilon)|z|;$$

y el lema 1 nos da la prueba del lema 2. **Q.E.D.**

Qué mensaje nos da este último lema: que los factores en el producto de i. se pueden reordenar si, y sólo si, se pueden reordenar los sumandos en la serie de ii.. Ya está motivada la

Definición. El producto infinito $\prod_{n\geq 1} (1 + z_n)$ converge absolutamente si la serie $\sum_{n\geq 1} |z_n|$ es convergente. O bien, por el propio lema anterior, si, y sólo si, $\prod_{n\geq 1} (1 + |z_n|)$ converge.

(Observemos que en el lema estamos tratando con números reales a_n y en la definición con complejos z_n.)

Corolario. Si un producto infinito converge absolutamente, entonces es convergente.

Demostración. El lema 2 nos proporciona la convergencia de la serie $\sum_{n\geq 1} |z_n|$; luego, en particular, podemos suponer

$$|z_n| < 1, \forall n \geq n_0.$$

(¿Por qué?) Como para $|z| < 1$ se tiene que

$$\log(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + ... = zh(z)$$

donde

$$h(z) = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} + ... \longrightarrow 1, \text{ si } z \longrightarrow 0,$$

y para $m \geq n_0$

$$\left| \sum_{n=n_0}^{m} \log\left(1+z_n\right) \right| \leq \sum_{n=n_0}^{m} \left| z_n h(z_n) \right|,$$

se tiene, por tanto, como el conjunto $\{h(z_n) : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado y la serie $\sum |z_n|$ converge, se sigue de la desigualdad anterior que

$$\left| \sum_{n=n_0}^{m} \log\left(1+z_n\right) \right| \longrightarrow 0$$

cuando $n_0, m \longrightarrow +\infty$. Pero ésto no es ni más ni menos que la convergencia de de la serie

$$\sum_{n\geq 1} \log\left(1+z_n\right);$$

luego aplicando ahora el lema 1, se tiene que el producto infinito $\prod_{n\geq 1}(1+z_n)$ converge. **Q.E.D.**

Ojo, más de lo que dice el lema 2, no se puede decir; no caigamos en la tentación de hacer uso inconsciente de la relación

$$\prod_{n\geq 1}(1+z_n) \text{ converge } \Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} z_n \text{ converge},$$

que, además, "ofrece" el siguiente

Argumento falaz: Consiste en probar, para complejos z_n (clave para diferenciarlo del lema 2, donde la equivalencia se da para la convergencia absoluta $|z_n| \geq 0$) que el producto infinito $\prod_{n\geq 1}(1+z_n)$ converge, si y sólo si, la serie $\sum_{n\geq 1} z_n$ converge. Ahí va:

** "Por el lema 1, tenemos que la convergencia del producto $\prod_{n\geq 1}(1+z_n)$ y de la serie $\sum_{n\geq 1}\log(1+z_n)$ son equivalentes. Si hacemos caso a Taylor: existe una función holomorfa g en un entorno del origen, con límite 1, tal que

$$\log\left(1+z\right) = zg(z).$$

Por tanto, para n suficientemente grande, $g(z_n)$ estará tan próximo a 1 como queramos, y así, la serie $\sum_{n\geq 1} z_n g(_n)$ converge si, sólo si, converge $\sum_{n\geq 1} z_n$, lo que concluye la prueba."

** Encuentra el gazapo y un contraejemplo.

Completamos esta primera parte con un resultado relativo a productos (infinitos) de funciones holomorfas. Queremos considerar, concretamente, funciones de la forma

$$f(z) := \prod_{n=1}^{+\infty}(1+f_n(z))$$

tomando valores en un dominio Ω. Recordemos, teorema de Weierstrass, que una condición suficiente para la holomorfía de f es que las f_n lo sean y que la sucesión de productos parciales converja uniformemente sobre compactos. Ahora, con esta notación, probamos que:

Proposición. Si $f_n \in \mathcal{H}(\Omega), n \in \mathbb{N}$ y la serie $\sum_{n\geq 1} |f_n|$ converge uniformemente sobre compactos, entonces el producto $\prod_{n\geq 1} (1+f_n)$ converge uniformemente sobre compactos y representa una función holomorfa en Ω. En particular, converge absolutamente en Ω.

Demostración. La convergencia absoluta se sigue del lema 2.

Sea K un subconjunto compacto del dominio Ω. La hipótesis sobre la serie $\sum_{n\geq 1} |f_n|$ nos garantiza que

$$\exists n : m \geq n \implies |f_n(z)| < 1, \forall z \in K.$$

Podemos suponer, por tanto, que las funciones $1 + f_n$ no se anulan en K. Y, por otro lado, podemos encontrar otro natural N tal que

$$\sum_{m=N+1}^{+\infty} |f_m(z)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall z \in K.$$

Pero, teniendo en cuenta que

$$|\log(1+\alpha)| = \left| \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m+1} \frac{\alpha^m}{m} \right| \leq |\alpha| \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right) = 2|\alpha|,$$

lo anterior nos dice que

$$\left| \sum_{m=N+1}^{+\infty} \log(1 + f_m(z)) \right| \leq \varepsilon, \forall z \in K,$$

lo cual equivale a la existencia de una función límite f sobre K a la que la serie $\sum_{n\geq 1} \log(1+f_n)$ converge uniformemente:

$$f(z) = \lim \sum_{n=1}^{+\infty} \log(1 + f_n(z)), \forall z \in K.$$

Esta función ha de estar acotada, y como la exponencial es uniformemente continua sobre dominios acotados, se tiene que

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{N} \log(1 + f_n(z))\right) \longrightarrow e^{f(z)}$$

uniformemente sobre el compacto K. La arbitrariedad del mismo nos da lo que deseamos. **Q.E.D.**

Ejemplo 1. Existe una función holomorfa en el disco unidad dada por

$$f(z) := \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + z^n).$$

Consideremos el producto infinito

$$\prod_{n\geq 1} (1 + z^n)$$

para $z \in \mathbb{D}$. Sea K un compacto del disco unidad. Como existe algún disco de radio $\delta < 1$ tal que

$$K \subset D(0, \delta),$$

el test de Weierstrass nos proporciona convergencia uniforme sobre K de la serie $\sum z^n$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |z|^n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \delta^n = \frac{\delta}{1-\delta},$$

luego la proposición nos dice que este producto define una función holomorfa en el disco unidad a la que converge en la topología de la convergencia uniforme sobre compactos.

Ejemplo 2. El producto infinito $\prod_{k\geq 1} \left(1 + \frac{1}{k^z}\right)$ define una función holomorfa en el semiplano $\operatorname{Re} z > 1$.

Fijemos un compacto K en el dominio Ω que estamos considerando. Ha de existir $\delta > 0$ tal que para cada elemento del compacto:

$$\operatorname{Re} z \geq 1 + \delta \implies \left|\frac{1}{k^z}\right| = \frac{1}{k^{\operatorname{Re} z}} \leq \frac{1}{k^{1+\delta}}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Consecuentemente, la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{1}{k^z}\right|$$

converge uniformemente sobre K. La proposición anterior ya se encarga del resto.

Algunas fórmulas notables.

Proposición (desarrollo en producto infinito del seno). Para cada complejo z se tiene que

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{k\pi}\right)^2\right).$$

Demostración. Consideremos la función auxiliar

$$f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C};\quad f(z):=z\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\left(\frac{z}{k\pi}\right)^2\right)(\sin z)^{-1}.$$

Objetivo: probar que se trata de la función constante 1.

El teorema de Riemann de singularidades evitables nos dice que f es una función entera y sin ceros. Además, es par. Vamos a estudiar el comportamiento de f para valores de z suficientemente grandes. Supongamos, así, que

$$\frac{1}{2}n\le|z|\le n.$$

Pero, en esta situación, el principio del módulo máximo nos dice que $|f(z)|$ alcanza su máximo sobre la poligonal

$$\left[\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)(1,i)\,,\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)(-1,i)\,,\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)(-1,-i)\,,\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)(1,-i)\right],$$

la cual tiene la gracia de no pasar (sea cual sea el valor del natural n) por ninguno de los ceros del seno. Vamos a probar que existe una constante $k>0$ tal que si z está sobre dicha poligonal, entonces

$$\frac{1}{|\sin z|}\le k.$$

En efecto. En general, se tiene

$$|\sin z|\ge|\sinh(\operatorname{Im}z)|\,,$$

luego

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\sin z|}&\le\frac{1}{|\sin(\operatorname{Im}z)|}=\frac{2}{|e^{\operatorname{Im}z}-e^{-\operatorname{Im}z}|}\le\frac{2}{e^{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}-e^{-\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}}\\&\le\frac{2}{e^{\pi\frac{3}{2}}-e^{-\pi\frac{3}{2}}}=:k.\end{aligned}$$

Además, podemos acotar el producto infinito mediante exponencial del modo siguiente:

$$\begin{aligned}\left|\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\left(\frac{z}{k\pi}\right)^2\right)\right|&=\left|\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{k\pi}\right)\left(1+\frac{z}{k\pi}\right)\right|\left|\prod_{k=n+1}^{+\infty}\left(1-\left(\frac{z}{k\pi}\right)^2\right)\right|\\&\le\prod_{k=1}^{n}e^{2\left|\frac{z}{k\pi}\right|}\prod_{k=n+1}^{+\infty}e^{2\left|\frac{z}{k\pi}\right|^2}<e^{2\frac{|z|}{\pi}(1+\log n)}e^{\frac{|z|^2}{k\pi^2}}\\&=\exp\left(2\frac{|z|}{\pi}(1+\log n)+\frac{|z|^2}{n\pi^2}\right)\end{aligned}$$

(donde hemos usado las desigualdades

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \log n \text{ y } \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(\pi k)^2} < \frac{1}{n\pi^2}$$

para obtener la última desigualdad). Observando, otra vez, el comportamiento de $|z|$ para n muy grande:

$$\frac{|z|^2}{n\pi^2} \leq |z| \implies \frac{2}{\pi}(1 + \log n) < \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{n}{2}} \leq \frac{1}{\pi}\sqrt{|z|},$$

se sigue que, al fin,

$$|f(z)| = \left| z \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{\left(1 - \left(\frac{z}{k\pi}\right)^2\right)}{\sin z} \right| \leq A \exp\left(|z|^{3/2}\right),$$

de donde se sigue la existencia de una constante B tal que

$$z \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{\left(1 - \left(\frac{z}{k\pi}\right)^2\right)}{\sin z} = Ae^{Bz}.$$

Ahora es cuando juega que f sea una función par: ha de ser $B = 0$, y podemos determinar A observando que

$$A = f(0) = \lim_{z \to 0} \frac{z}{\sin z} = 1.$$

Q.E.D.

Una simpática forma de escribir el mismo resultado, y muy natural, sabiendo que lo que queremos es obtener una función entera que se anule en todos y cada uno de los enteros, es expresar la función $\frac{\sin(\pi z)}{\pi}$ como:

$$...(z+k+1)(z+k)...(z+2)(z+1)\,z\,(z-1)(z-2)...(z-k)(z-k-1)...$$

Pero, simpatías aparte, el lema 2 enunciado más arriba nos expone que esta expresión mediante producto no es absolutamente convergente en ningún punto de $\mathbb{C}\backslash\{0\}$; es decir, no podemos agrupar los factores de cualquier forma y escribir, por ejemplo:

$$\sin(z) = z \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{z}{k\pi}\right) \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{z}{k\pi}\right).$$

La última parte de este tema se dedicará a obtener estas factorizaciones de modo absolutamente convergente: la función exponencial jugará un papel extremadamente importante en este aspecto y nos proveerá de los tan esperados ya, factores primarios de Weierstass.

Antes, algunos otros ejemplos interesantes.

Ejemplo 1 (producto infinito del coseno). Para cada complejo z se tiene que

$$\cos z = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{2z}{(2k-1)\,\pi} \right)^2 \right).$$

Demostración. La factorización del seno permite los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned}
\cos z &= \frac{\sin 2z}{2\sin z} = \frac{2z \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{2z}{k\pi}\right)^2\right)}{2z \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{k\pi}\right)^2\right)} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{2z}{(2k-1)\pi}\right)^2\right)\left(1 - \left(\frac{2z}{(2k)\pi}\right)^2\right)}{\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{k\pi}\right)^2\right)} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{2z}{(2k-1)\pi} \right)^2 \right).
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Ejemplo 2 (fórmula de Wallis). Se verifica

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7}...$$

Demostración. Evaluamos en $\frac{\pi}{2}$ la factorización del seno:

$$1 = \sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{(2k)^2} \right);$$

de donde

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{(2k)^2}{(2k)^2 - 1} = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{2k}{2k+1}\frac{2k}{2k-1}. \quad \blacksquare$$

Nota: Se puede razonar, al hilo de la demostración anterior, que la serie es convergente, pero no es absolutamente convergente: si llamamos

$$P_n := \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k)^2 - 1}$$

al término general de la sucesión de productos parciales, lo que se prueba, realmente, es que P_{2n} converge a $\frac{\pi}{2}$; pero

$$P_{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+1} P_{2n}, \forall n \in \mathbb{N},$$

de donde se sigue que la sucesión P_{2n+1} converge igualmente (¡y al mismo límite!), ergo P_n. Y, sin embargo, los productos

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{2k}{2k+1} \text{ y } \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{2k}{2k-1}$$

son divergentes, de donde se sigue que no hay convergencia absoluta.

Pasamos ya a uno de los resultados centrales de la teoría de funciones analíticas.

Teorema de Factorización de Weierstrass. Para cualquier sucesión $\lambda_n \longrightarrow \infty$ existe una función entera f tal que

$$f(z) = 0 \iff z \in \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Algunas cuestiones previas a la demostración de este hecho:

1. La hipóptesis sobre la sucesión... sólo consiste en evitar trivialidades: si es finito el conjunto de ceros, el producto no da problemas y la función es el resultado de un producto de polinomio y exponencial adecuados; y si la sucesión no converge a ∞, alguna de sus parciales se va a acumular en algún punto de $\mathbb{C}$: un dominio para el que el principio de identidad no dejaría más escapatoria que $f = 0$.

2. Hay formas obvias, triviales, de definir una función arbitraria que verifique el " $\iff$ ". Lo importante es la holomorfía; y, de ahí, la absoluta convergencia de la expresión como producto infinito. Esta es la verdadera fuerza de este resultado.

Comenzamos con argumentos de tipo heurístico: Para definir la tal $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ parecería natural hacer

$$f(z) := \prod_{n=1}^{+\infty} (z - \lambda_n).$$

Pero, ya de entrada, observaciones tan elementales como la hipótesis sobre la sucesión (λ_n), razonando para z fijo, conlleva que la sucesión de factores no convergería a 1, luego divergería el producto. Este "detalle" lo podemos evitar considerando los ceros en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ y escribiendo

$$f(z) := \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right),$$

pues, ahora, si la serie

$$\sum \left|\frac{1}{\lambda_n}\right|$$

es convergente, entonces la serie

$$\sum \left|\frac{z}{\lambda_n}\right|$$

converge uniformemente sobre compactos, luego así también el producto y resulta la deseada función entera.

Además, aún en el caso de divergencia de la serie $\sum \left|\frac{1}{\lambda_n}\right|$ pero convergencia de $\sum \left|\frac{1}{\lambda_n}\right|^2$, podemos modificar la definición de f así:

$$f(z) := \prod_{n=1}^{+\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) \exp\left(\frac{z}{\lambda_n}\right) \right].$$

Estos "factores de convergencia" actúan así: razonando sobre compactos y para n conveniente, podemos hacer $|\lambda_n| > 2\,|z|$, de donde

$$\begin{aligned} \left|\log\left[\left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right)\exp\left(\frac{z}{\lambda_n}\right)\right]\right| &= \left|\left(-\frac{z}{\lambda_n} - \frac{z^2}{2\lambda_n^2} - \frac{z^3}{3\lambda_n^3} - ...\right) + \frac{z}{\lambda_n}\right| \leq \\ &\leq \left|\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right| \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...\right) = \left|\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right|, \end{aligned}$$

luego hay convergencia uniforme sobre compactos. Por tanto, la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left[\left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right)\exp\left(\frac{z}{\lambda_n}\right)\right], \qquad z \neq \lambda_n$$

es uniformemente convergente, y el producto lo será sobre compactos.

El mismo razonamiento nos es válido si consideramos series del tipo

$$\sum_{n\geq 1} \left|\frac{1}{\lambda_n}\right|^{p+1}$$

para $p \in \mathbb{N}$; lo cual nos habilita para considerar los factores de convergencia

$$W_n(z) := \exp\left(\frac{z}{\lambda_n} + \frac{z^2}{2\lambda_n^2} + ... + \frac{z^p}{p\lambda_n^p}\right)$$

que garantizan la convergencia uniforme sobre compactos del producto

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) W_n(z),$$

que, además, representa una función entera con los ceros deseados... Sin embargo,

$$\exists\,(\lambda_n) \subset \mathbb{C} : \lambda_n \longrightarrow \infty \text{ y } \sum \left|\frac{1}{\lambda_n}\right|^p \text{ divergente para todo } p \in \mathbb{N},$$

por ejemplo, la sucesión $(\log n)_{n\geq 2}$. Para este pequeño atasco basta "redefinir" los factores de convergencia como:

$$W_n(z) := \exp\left(\frac{z}{\lambda_n} + \frac{z^2}{2\lambda_n^2} + ... + \frac{z^n}{n\lambda_n^n}\right),$$

donde, por el momento, seguimos con $\lambda_n \neq 0$. Y ya entramos en la

Demostración (del teorema de factorización de Weierstrass). Razonando, como más arriba, sobre compactos y para n conveniente, podemos hacer $|\lambda_n| > 2|z|$, a partir de conveniente natural n, de donde

$$\left|\log\left[\left(1-\frac{z}{\lambda_n}\right)W_n(z)\right]\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left|\frac{z^k}{k\lambda_n^k}\right| \leq \left|\frac{z}{\lambda_n}\right|^n \leq \frac{1}{2^n}.$$

En resumen, las expresiones

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\log\left[\left(1-\frac{z}{\lambda_n}\right)W_n(z)\right] \text{ y } \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{\lambda_n}\right)W_n(z)$$

son uniformemente convergentes sobre compactos. Además, cada factor sólo se anula en λ_n; y por la definición del producto infinito, éste sólo se anula en tales puntos. Sólo resta añadir los posibles ceros en el origen y hacer

$$f(z) := z^p\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{\lambda_n}\right)W_n(z), \forall z \in \mathbb{C}.$$

Q.E.D.

Ejemplo. Queremos lograr una función entera con ceros en $-\mathbb{N}$.

Notemos que la serie $\sum 1/|-n|$ diverge, pero $\sum 1/n^2$ converge. Por tanto, podemos definir tal función como

$$f(z) := \left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Corolario. Toda función f meromorfa en el plano $\mathbb{C}$ se puede escribir como el cociente de dos funciones enteras.

Demostración. Las singularidades de f son todas polos. Escribamos este conjunto como Λ, donde cada polo aparece tantas veces como su orden indique. A este conjunto le podemos asociar, vía teorema de Weierstrass, una función entera h tal que $\mathcal{Z}(h) = \Lambda$. Ahora bien, el teorema de singularidades evitables de Riemann nos garantiza que $g := fh$ es una función entera tal que $\mathcal{Z}(g) = \mathcal{Z}(f)$. Por el principio de identidad es $f = g/h$. **Q.E.D.**

Aplicación: estudio de la función Gamma.

En el ejemplo de arriba hemos visto cómo la función entera con ceros en $-\mathbb{N}$ más sencilla es el producto canónico

$$f(z) := \left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}, \forall z \in \mathbb{C}. \qquad [*]$$

Claramente

$$z \longrightarrow f(-z)$$

tiene a los naturales como ceros, y:

$$zf(z)f(-z) = \frac{\sin \pi z}{\pi}.$$

Vamos a profundizar en algunas propiedades de f aprovechando la forma en la que ha sido construida. La función

$$z \longrightarrow f(z-1)$$

tiene los mismos ceros que f y, además, el origen. Por tanto, nos está permitido escribir

$$f(z-1) = zf(z)\exp\left(g(z)\right),$$

donde $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Queremos determinar la función entera g.

Si tomamos derivadas logarítmicas en ambos miembros de la ecuación anterior (usando la expresión [$*$]) se tiene:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{z-1+n} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z} + g'(z) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right). \qquad [**]$$

Si hacemos el cambio $n \leftrightarrow n+1$ en la serie de la izquierda, operando en ese miembro nos queda:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{z-1+n} - \frac{1}{n}\right) &= \sum_{n+1=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{z-1+n+1} - \frac{1}{n+1}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1}\right)\\
&= \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),
\end{aligned}$$

donde la última serie suma 1. En consecuencia, la ecuación [$**$] se reduce a $g'(z) = 0$, sea cual sea el valor del complejo z; luego la función g buscada es una constante. Llamemos γ a tal constante. Por tanto:

$$f(z-1) = e^{\gamma} z f(z), \forall z \in \mathbb{C}.$$

De algún modo, es más sencillo operar considerando la función

$$h(z) := f(z)\exp(\gamma z), \forall z \in \mathbb{C},$$

la cual verifica la relación

$$h(z-1) = zh(z), \forall z \in \mathbb{C}. \qquad [***]$$

Ahora, el valor de γ se puede obtener de modo sencillo: haciendo $z = 1$,

$$1 = f(0) = e^{\gamma} f(1),$$

de donde

$$e^{-\gamma} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-1/n}.$$

Como el n-ésimo producto parcial en dicha expresión se puede escribir así:

$$(n+1) \exp \left[- \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} \right) \right],$$

tomando logaritmos (y aprovechando su continuidad), nos queda:

$$\gamma = \lim \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \log n \right).$$

Se trata de la llamada constante de Euler, cuyo valor (aproximado) es $\gamma \approx 0.57722$.

Dado que h verifica la relación $[***]$, si hacemos $\Gamma(z) := 1/\left[zh(z)\right]$, entonces aparece la relación

$$\Gamma\left(z+1\right) = z\Gamma(z), \forall z \in \mathbb{C}.$$

Esta función entra, por derecho, entre el reducido círculo de funciones famosas de las matemáticas bajo el nombre de función gamma de Euler.

La forma en la que la hemos introducido permite obtenerla como:

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n},$$

de modo que

$$\Gamma(z)\Gamma(z-1) = \frac{\pi}{\sin\left(\pi z\right)}.$$

Observamos, de modo inmediato, que la función Γ es meromorfa (y con sus polos en $-\mathbb{N} \cup \{0\}$), pero no tiene ceros. Es sencillo comprobar que esta función es una generalización de la función factorial. Concretamente: $\Gamma(n) = (n-1)!$ para cada natural n.

Igualmente, de la última relación, podemos extraer como información, que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Otras propiedades de interés de la función gamma las podemos obtener a partir de la segunda derivada de $\log \Gamma$. Por derivación

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(z+n\right)^2}.$$

Por ejemplo, se puede comprobar que como $\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})$ y $\Gamma(2z)$ tienen los mismos polos, la relación anterior nos da:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)+\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z+\frac{1}{2})}{\Gamma(z+\frac{1}{2})}\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(z+n)^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\left(z+n+\frac{1}{2}\right)^2} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{(2z+2n)^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{(2z+2n+1)^2} \\
&= 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2z+n)^2}=2\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)}\right).
\end{aligned}$$

Por integración se obtiene

$$\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})=e^{az+b}\Gamma(2z),$$

y usando relaciones conocidas para los valores $z=1/2$ y $z=1$, se tiene (pruébese) que

$$a=-2\log 2,\qquad b=\frac{1}{2}\log\pi+\log 2,$$

de donde se sigue la llamada fórmula de duplicación de Legendre:

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2z)=2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}).$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Determina cuáles de los siguientes productos infinitos son convergentes:

$$\begin{array}{llll}
\text{i.} & \prod_{n\in\mathbb{N}}\left(1-\frac{1}{2^n}\right); & \text{ii.} & \prod_{n\in\mathbb{N}}\left(1-\frac{1}{n+1}\right); \\
\text{iii.} & \prod_{n\in\mathbb{N}}\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right); & \text{iv.} & \prod_{n\geq 2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right); \\
\text{v.} & \prod_{n\in\mathbb{N}}\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right); & \text{vi.} & \prod_{n\in\mathbb{N}}\left(1+\frac{1}{n^2}\right).
\end{array}$$

2. Este ejercicio expone información suplementaria muy interesante a la teoría expuesta arriba:

   (a) Ayúdate del producto infinito dado en 1.v. para probar que

   $$\sum z_n \text{ converge } \not\Rightarrow \prod(1+z_n) \text{ converge.}$$

   (b) Prueba que, sin embargo,

   $$\text{si } \sum z_n \text{ y } \sum |z_n|^2 \text{ convergen } \Longrightarrow \prod(1+z_n) \text{ converge.}$$

(c) Busca, y encuentra, un ejemplo de producto infinito $\prod(1+z_n)$ convergente (a un límite no nulo) tal que $\sum z_n$ no sea convergente.

3. Define una función entera que tenga ceros simples en los cuadrados de los naturales.

4. Determina los productos canónicos asociados a cada una de las siguientes sucesiones:

$$\text{i. } z_n := 2^n; \quad \text{ii. } z_n := n^b : b > 0; \quad \text{iii. } z_n := n\,(\ln n)^2\,.$$

5. Prueba que los siguientes productos definen funciones enteras:

$$\text{i. } \prod_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} (1+a^n z) : a \in \mathbb{D}; \quad \text{ii. } \prod_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(1-\tfrac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}};$$
$$\text{iii. } \prod_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(1+\tfrac{z}{n(\ln n)^2}\right).$$

6. Encuentra una función f holomorfa (no trivial) en el disco unidad tal que sus ceros los tome en los puntos $\left\{1-\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$. (Te puedes ayudar de una función entera g que se anule en los naturales, y luego definir $f(z) := g\left(\frac{1}{1-z}\right)$.)