Tema 4.3: Desarrollo de Taylor. Equivalencia entre analiticidad y holomorfía. Fórmula de Cauchy para las derivadas

Facultad de Ciencias Experimentales, Curso 2008-09

E. de Amo

Tal y como ya anunciábamos en el tema anterior, vamos a sacarle partido a la fórmula de Cauchy para la circunferencia:

$$\left.\begin{array}{c} \Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C} \\ f \in \mathcal{H}(\Omega) \\ \overline{D(a,r)} \subset \Omega \end{array}\right\} \Rightarrow f(z) = \frac{1}{i2\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw, \qquad \forall z \in D(a,r).$$

El resultado que probamos a continuación es la muestra más explícita de cómo la variable compleja es el lugar adecuado para el concepto de analiticidad. Observa detenidamente las hipótesis en el próximo resultado; luego, contempla la tesis (y ambas dos cosas comparadas con el resultado arriba expuesto). ¡No te parece realmente espectacular!

Teorema (del desarrollo en serie de Taylor). Sean $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$. Entonces

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{i2\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \right) (z-a)^n, \qquad \forall z \in D(a,r).$$

Demostración. Para $z \in D(a,r)$ fijo, aunque arbitrario, tenemos que

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}$$

uniformemente para $w \in \mathcal{C}(a,r)$. Como f es continua en $\overline{D(a,r)}$, en particular, estará acotada en la circunferencia $\mathcal{C}(a,r)$; y, por tanto,

$$\frac{f(w)}{w-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(w)(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}},$$

uniformemente para $w \in \mathcal{C}(a,r)$. En consecuencia

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{i2\pi}\int_{\mathcal{C}(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}dw \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{i2\pi}\int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw\right)(z-a)^n, \forall z \in D(a,r), \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos conmutado serie e integral. Y el z, aunque fijo, era arbitrario. **Q.E.D.**

La fuerza de este resultado se manifiesta en sus logros:

1. Nuestra función, que "sólo" era holomorfa, se presenta ahora como analítica.
2. En particular, es indefinidamente derivable.
3. En consecuencia:
$$\frac{f^{n)}(a)}{n!} = \frac{1}{i2\pi}\int_{\mathcal{C}(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw, \qquad \left.\begin{array}{r} \forall r > 0 : \overline{D(a,r)} \subset \Omega \\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{array}\right\}.$$
4. Y, en consecuencia, el desarrollo no depende del $r > 0$ elegido.
5. Y, en consecuencia, la serie convergerá en el mayor disco centrado en a que permanezca completamente en el abierto.

Pasamos a enunciarlos correctamente.

Corolario Sea $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$. Entonces, se tiene que:

$$f \in \mathcal{H}(\Omega) \Leftrightarrow f \text{ es analítica en } \Omega.$$

Corolario Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, entonces, para cada $a \in \mathbb{C}$, la serie de Taylor de f centrada en a, tiene radio de convergencia $R = +\infty$ y el desarrollo en serie es válido en todo el plano $\mathbb{C}$.

Corolario Sean Ω un abierto propio del plano, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $a \in \Omega$. Entonces, la serie de Taylor de f centrada en a, a saber: $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{n)}(a)}{n!}(z-a)^n$, tiene radio de convergencia $r \geq \operatorname{dist}(a, \mathbb{C}\backslash\Omega)$ y se verifica

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{n)}(a)}{n!}(z-a)^n, \qquad \forall z \in D(a, \operatorname{dist}(a, \mathbb{C}\backslash\Omega)).$$

Demostración. Llamemos r_a al radio de convergencia de la serie de Taylor de f centrada en a. Sea $s < \operatorname{dist}(a, \mathbb{C}\backslash\Omega)$; entonces $\overline{D(a,s)} \subset \Omega$. Por tanto, existe una serie de potencias centrada en a y convergente a f en $D(a,s)$. Pero tal serie no puede ser otra que la serie de Taylor de f centrada en a; luego $s \leq r_a$, y así $r_a \geq \operatorname{dist}(a, \mathbb{C}\backslash\Omega)$). **Q.E.D.**

Nota: Observa que es posible la situación $D(a, r_a) \nsubseteq \Omega$.

Sorprendente, pero no nos había sido posible, hasta ahora, establecer que:

Corolario La composición, el producto y el cociente de funciones analíticas son, nuevamente, funciones analíticas.

Corolario Sean Ω un abierto del plano $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $a \in \Omega$. Entonces,

$$f^{n)}(a) = \frac{n!}{i2\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw, \qquad \left.\begin{array}{r} \forall r > 0 : \overline{D(a,r)} \subset \Omega \\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{array}\right\}.$$

Volviendo sobre nuestros pasos, recordemos que hemos probado que si una función es holomorfa en un abierto, su función derivada vuelve a ser otra función holomorfa. Es decir, que si bien en el caso real, para un intervalo I, teníamos toda una gama de clases de funciones distintas en la cadena

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}(I) & \supsetneq & ... \supsetneq \mathcal{D}^n(I) \supsetneq \mathcal{C}^n(I) \supsetneq \\ & \supsetneq & \mathcal{D}^{n+1}(I) \supsetneq \mathcal{C}^{n+1}(I) \supsetneq ... \supsetneq \mathcal{A}(I) = \mathcal{C}^\infty(I) \end{array}$$

(la clase $\mathcal{C}^n(I)$ de las funciones continuas con derivada n-ésima continua contiene de modo propio a la clase $\mathcal{D}^{n+1}(I)$ de las funciones derivables $n+1$ veces; la cual, a su vez, es superconjunto propio de $\mathcal{C}^{n+1}(I)$ las funciones continuas con derivada $n+1$-ésima continua); ahora, en el caso complejo, tenemos que esa cadena se reduce a ¡dos elementos! En efecto, son las continuas y las analíticas u holomorfas:

$$\mathcal{C}(\Omega) \supsetneq \mathcal{H}(\Omega) = \mathcal{D}^1(\Omega) = \mathcal{A}(\Omega).$$

Y no es este el único acontecimiento sorprendente que nos depara este tema en lo relativo a la relación entre los análisis complejo y real: el concepto de radio de convergencia cobra todo su significado en $\mathbb{C}$ y no presenta las patologías que, en la Introducción, destacábamos en el cuerpo $\mathbb{R}$ (recuérdese que la serie de potencias que representa a la función de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$, tiene validez sólo en $]-1,+1[$). Concretamente, en $\mathbb{R}$:

Teorema (de Borel). Para cada sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ de números reales existe una función diferenciable de clase infinito en $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, tal que

$$f^{n)}(0) = a_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Pero en $\mathbb{C}$ "no vale todo":

Proposición Sea una sucesión arbitraria de números complejos $(a_n)_{n\geq 0}$. Son equivalentes:

- **i.** Existe una función entera f tal que $f^{n)}(0) = a_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- **ii.** $\limsup \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}} = 0$

Demostración. i.⇒ii. Por ser entera:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{n)}(0)}{n!} z^n, \forall z \in \mathbb{C}.$$

En consecuencia, su radio de converegencia es $+\infty$; de ahí que $\limsup \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}} = 0$.

ii.⇒i. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n, \forall z \in \mathbb{C}$. La serie está bien definida convergiendo en todo el plano. Por tanto, al ser analítica en $\mathbb{C}$, es holomorfa en $\mathbb{C}$. **Q.E.D.**

Proposición (un refinamiento de la anterior). Sea una sucesión arbitraria de números complejos $(a_n)_{n\geq 0}$ y $a \in \mathbb{C}$. Son equivalentes:

i. Existe una función f holomorfa en a tal que

$$f^{n)}(a) = a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

ii. La sucesión $\left(\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}}\right)_{n\geq 0}$ está acotada.

Demostración. i.⇒ii. Tenemos, por hipótesis, que la serie de potencias $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} (z-a)^n$ converge en algún disco $D(a,r)$ (para $r > 0$). En consecuencia, $\limsup \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}} = 1/r$, de donde se sigue la acotación de $\left(\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}}\right)_{n\geq 0}$.

ii.⇒i. De la acotación se sigue que la serie de potencias $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} (z-a)^n$ es analítica en algún disco $D(a,r)$ (para $r > 0$). Luego se define una función holomorfa f sin más que hacer $f^{n)}(a) = a_n$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. **Q.E.D.**

En el último corolario al teorema de Taylor hemos obtenido la fórmula

$$f^{n)}(a) = \frac{n!}{i2\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw, \qquad \left. \begin{array}{r} \forall r > 0 : \overline{D(a,r)} \subset \Omega \\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{array} \right\} \qquad [*]$$

Pero sabemos por el teorema local de Cauchy que

$$f(z) = \frac{1}{i2\pi} \int_{C(a,r)^*} \frac{f(w)}{w-z} dw, \qquad \forall z \in D(a,r);$$

luego $[*]$ sólo nos informa para la situación $n = 0$ y $z = a$. Sin embargo, con las mismas hipótesis del teorema de Taylor (que son las mismas de la fórmula de Cauchy para la circunferencia), ahora ya somos capaces de mayores logros gracias a la potencia de la teoría de funciones analíticas:

Teorema (Fórmula de Cauchy para las derivadas). Sean $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$. Entonces

$$f^{k)}(z) = \frac{k!}{i2\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}} dw, \qquad \left. \begin{array}{r} \forall z \in D(a,r) \\ \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{array} \right\}.$$

Demostración. Derivando k veces en la serie de Taylor de f, tenemos

$$f^{k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} \left(\frac{1}{i2\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}} dw \right) \frac{n!}{(n-k)!} (z-a)^n, \forall z \in D(a,r). \quad [*]$$

(Observa que estamos en las mismas hipótesis de Taylor, como ya se avisó más arriba.) Por otro lado, ya nos es conocido que

$$w \in \mathcal{C}(a,r) \Rightarrow \frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}, \qquad \forall z \in D(a,r).$$

Derivándola, igualmente, k veces en z (y por la arbitrariedad de w):

$$\frac{k!}{(w-z)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{(z-a)^{n-k}}{(w-a)^{n+1}}, \qquad \forall z \in D(a,r), \forall w \in \mathcal{C}(a,r). \qquad [**]$$

La (nueva) serie es convergente (por el criterio del cociente):

$$\left| \frac{n!}{(n-k)!} \frac{(z-a)^{n-k}}{(w-a)^{n+1}} \right| = \frac{1}{|z-a|^k r} \frac{n!}{(n-k)!} \left(\frac{|z-a|}{r} \right)^n.$$

Luego, aplicando el test de Weierstrass, la igualdad [**] es uniforme sobre la circunferencia $\mathcal{C}(a,r)$; y, por la acotación de f sobre la misma, tenemos que

$$\frac{k! f(w)}{(w-z)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} (z-a)^{n-k}$$

es también uniforme sobre ella.

Consecuentemente, integrando la fórmula anterior sobre la circunferencia $\mathcal{C}(a,r)$, conmutando serie e integral, y usando la fórmula [*], tendremos

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}(a,r)} \frac{k! f(w)}{(w-z)^{k+1}} dw &= \sum_{n=k}^{+\infty} \left(\int_{\mathcal{C}(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \right) \frac{n!}{(n-k)!} (z-a)^{n-k} \\ &= i2\pi f^{k)}(z), \end{aligned}$$

es decir,

$$f^{k)}(z) = \frac{k!}{i2\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}} dw, \qquad \left. \begin{array}{r} \forall z \in D(a,r) \\ \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{array} \right\}$$

pues z y k eran fijos, pero arbitrarios. **Q.E.D.**

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Sea $\gamma := C\left(a, R\right)$ y $\Phi : \gamma^* \to \mathbb{C}$ una función continua. Prueba que la función $f : D(a, R) \to \mathbb{C}$ dada por
$$f(z) := \int_\gamma \frac{\Phi\left(w\right)}{w - z} dw, \quad \forall z \in D(a, R)$$
es holomorfa en dicho disco. Prueba, también, que
$$f^{k)}(z) = k! \int_\gamma \frac{\Phi\left(w\right)}{\left(w - z\right)^{k+1}} dw, \quad \forall z \in D(a, R), \forall k \in \mathbb{N}.$$

2. (*Desarrollo limitado de Taylor*) Sea f una función holomorfa en un abierto que contenga al disco cerrado $\overline{D}(a, R)$ y sea la circunferencia $\gamma := C\left(a, R\right)$. Prueba que para todo $z \in D(a, R)$ y todo $n \in \mathbb{N}$:
$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(a)}{k!} \left(z - a\right)^k + \frac{\left(z - a\right)^{n+1}}{i2\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z)(w - a)^{n+1}} dw.$$

3. Obténgase el desarrollo en serie de potencias centrado en el origen de la función f y calcula el radio de convergencia en cada uno de los siguientes casos:

   a. $f(z) := \log\left(z^2 - 3z + 2\right), \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1, 2\}$;
   b. $f(z) := \left(\frac{z}{1+z}\right)^2, \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$;
   c. $f(z) := \exp\left(\alpha \log\left(1 + z\right)\right), \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \quad (\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$;
   d. $f(z) := \cos^2 z, \forall z \in \mathbb{C}$.

4. En cada uno de los siguientes casos, determina si existe una función holomorfa f sobre el dominio Ω y tal que $f^{n)}(0) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Encuentra, en cada caso, las correspondientes funciones f que verifiquen las condiciones pedidas:

   a. $\Omega := \mathbb{C}, \quad a_n := n, \forall n \in \mathbb{N}$;
   b. $\Omega := \mathbb{C}, \quad a_n := (n + 1)!, \forall n \in \mathbb{N}$;
   c. $\Omega := D(0, 1), \quad a_n := 2^n n!, \forall n \in \mathbb{N}$;
   d. $\Omega := D(0, \frac{1}{2}), \quad a_n := n^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

5. Sea $f \in \mathcal{R}_{\mathbb{C}}\left([a, b]\right)$. Si definimos
$$F(z) := \int_a^b \exp\left(-zt\right) f(t) dt, \forall z \in \mathbb{C},$$
prueba que F es una función entera.

6. Calcula las integrales
$$\int_{\gamma_k} \frac{e^z}{z\left(1 - z\right)^3} dz$$
para
$$\gamma_1 := C\left(1, \tfrac{1}{2}\right), \qquad \gamma_2 := C\left(2, 3\right).$$

7. Calcula, con $n \in \mathbb{N}$, las siguientes integrales:

$$\text{a. } \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin(z)}{z^n} dz; \quad \text{b. } \int_{\mathbb{T}} \frac{e^z - e^{-z}}{z^n} dz.$$

8. Sea $\frac{1}{1-z-z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n$ un desarrollo en serie de potencias válido en un entorno del origen. Prueba que (α_n) es la sucesión de Fibonacci:

$$\alpha_1 := \alpha_2 := 1, \quad \alpha_{n+1} := \alpha_{n-1} + \alpha_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dedúzcase que

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right], \forall n \in \mathbb{N}.$$

9. Se define

$$F(z) := \exp\left(z^2\right) \int_{[0,z]} \exp\left(-w^2\right) dw, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Prueba que F es entera y que

$$F'(z) = 1 + 2zF(z), \forall z \in \mathbb{C}.$$

10. Prueba que, para $0 < r < 1$, se tiene:

$$\int_{C(0,r)} \frac{\log(1+z)}{z} dz = 0,$$

y deduce que

$$\int_0^{2\pi} \ln\left(1 + r^2 + 2r\cos\theta\right) d\theta = 0.$$