Tema 4.2: Teorema de Cauchy para el triángulo. Versión elemental del teorema de Cauchy y de la fórmula de Cauchy

Facultad de Ciencias Experimentales, Curso 2008-09

E. de Amo

Comenzamos con este tema toda una saga de resultados (teoremas de tipo Cauchy) conducentes a lograr que

$$\int_\gamma f = 0.$$

El primero de ellos precisa de una condición muy concreta a verificar por parte de la curva: cuando γ se trate de los lados de un triángulo, la fórmula anterior será cierta sean quienes sean la función holomorfa f y el abierto Ω sobre el que esté definida.

Dados $a, b, c \in \mathbb{C}$, el triángulo formado por dichos tres puntos es el conjunto

$$\triangle (a, b, c) := \{\alpha a + \beta b + \gamma c : \alpha, \beta, \gamma \geq 0, \alpha + \beta + \gamma = 1\}.$$

Observa que $\triangle (a, b, c)$ es la envolvente convexa de los puntos a, b y c. Es un convexo compacto del plano $\mathbb{C}$.

Teorema (de Cauchy para el triángulo. Cauchy-Goursat, 1905). Sean un abierto Ω del plano y una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos, dados tres puntos a, b, c, que $\triangle (a, b, c) \subset \Omega$. Entonces

$$\int_{[a,b,c,a]} f = 0.$$

Demostración (de Prinsheim, 1935). Notaremos $\blacktriangle_0 := \triangle (a, b, c)$ y $\gamma_0 := [a, b, c, a]$. Llamemos $I_0 := \int_{\gamma_0} f$. Si $|I_0| = 0$, no hay nada que probar. Podemos suponer, por tanto, que $|I_0| \neq 0$. Denotemos

$$a' := \frac{b + c}{2}, b' := \frac{a + c}{2}, c' := \frac{a + b}{2},$$

y consideremos, en γ^*, el siguiente recorrido:

$$a \to c' \to b' \to a' \to c' \to b \to a' \to b' \to c' \to a' \to c \to b \to a.$$

Así, el triángulo inicial $\blacktriangle_0$, queda dividido en cuatro triángulos

$$\blacktriangle_1 := \triangle\left(a, c', b'\right), \blacktriangle_2 := \triangle\left(c', b, a'\right), \blacktriangle_3 := \triangle\left(a', b', c\right), \blacktriangle_4 := \triangle\left(a', b', c'\right).$$

Llamando $J_k := \int_{\partial\blacktriangle_k} f$, para $1 \leq k \leq 4$, tendremos

$$I_0 = J_1 + J_2 + J_3 + J_4.$$

Es trivial deducir que, para alguno de esos k, se tiene que

$$|I_0| \leq 4\,|J_k|\,.$$

Acordemos que sea para $k = 1$ cuando se verifica tal relación. Por comodidad en este razonamiento, sea $\partial\blacktriangle_1 := \gamma_1$.

Así, tendremos, de momento, que

$$\begin{cases} |I_0| \leq 4\,|I_1|\,; \\ \blacktriangle_1 \subset \blacktriangle_0; \\ \text{diám}(\blacktriangle_1) = \frac{1}{2}\text{diám}(\blacktriangle_0)\,; \\ \text{long}(\gamma_1) = \frac{1}{2}\text{long}(\gamma_0)\,. \end{cases}$$

Haciendo hipótesis de inducción: para cierto natural n, asumimos cierta la situación

$$\begin{cases} |I_0| \leq 4^n\,|I_n|\,; \\ \blacktriangle_n \subset \blacktriangle_{n-1}; \\ \text{diám}(\blacktriangle_n) = \frac{1}{2^n}\text{diám}(\blacktriangle_0)\,; \\ \text{long}(\gamma_n) = \frac{1}{2^n}\text{long}(\gamma_0)\,. \qquad (\gamma_n := \partial\blacktriangle_n) \end{cases}$$

Podemos rehacer sobre el par $(\blacktriangle_n, I_n)$ el razonamiento dado inicialmente sobre el par $(\blacktriangle_0, I_0)$, de modo que obtenemos un nuevo par $(\blacktriangle_{n+1}, I_{n+1})$ verificando

$$\begin{cases} |I_0| \leq 4^{n+1}\,|I_{n+1}|\,; \\ \blacktriangle_{n+1} \subset \blacktriangle_n; \\ \text{diám}(\blacktriangle_{n+1}) = \frac{1}{2^{n+1}}\text{diám}(\blacktriangle_0)\,; \\ \text{long}\big(\gamma_{n+1}\big) = \frac{1}{2^{n+1}}\text{long}(\gamma_0)\,. \end{cases}$$

Por el teorema de Cantor de los intervalos compactos encajados,

$$\exists z_0 \in \Omega : \bigcap_{n=0}^{+\infty} \blacktriangle_n = \{z_0\}\,.$$

Razonemos por argumentos de holomorfía para la función f: dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $z \in D\left(z_0, \delta\right) \subset \Omega$, entonces

$$\left|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)\left(z - z_0\right)\right| \leq \varepsilon\,|z - z_0|\,.$$

Para tal δ,

$$\exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \Rightarrow \text{ diám}\left(\blacktriangle_n\right) = \frac{1}{2^n}\text{diám}\left(\blacktriangle_0\right) < \delta.$$

Así, $\blacktriangle_n \subset D(z_0, \delta)$; de donde, en particular, $\gamma_n \subset D(z_0, \delta)$.

Ahora bien, como

$$\int_{\gamma_n} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0))\, dz = 0$$

(¿por qué?), y podemos razonar así para $z \in \blacktriangle_n$:

$$I_n = \int_{\gamma_n} f = \int_{\gamma_n} [f(z) - (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0))]\, dz,$$

de donde

$$|I_n| \leq \ \operatorname{long}(\gamma_n) \, \| f(z) - (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)) \| \leq \varepsilon \ \text{diám}(\blacktriangle_n).$$

Luego

$$|I| \leq 4^n \frac{1}{2^2} \operatorname{long}(\gamma_0) \frac{1}{2^n} \text{diám}(\blacktriangle_0)\, \varepsilon = \operatorname{long}(\gamma_0) \ \text{diám}(\blacktriangle_0)\, \varepsilon;$$

de donde, por la arbitrariedad de ε, se sigue que $|I| = 0$. **Q.E.D.**

Teorema (Pseudo-extensión del teorema de Cauchy para el triángulo). Sean un abierto Ω del plano, $\alpha \in \Omega$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Supongamos que $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{\alpha\})$. Entonces, para todo triángulo $\blacktriangle \subset \Omega$,

$$\int_{\partial \blacktriangle} f = 0.$$

Demostración. Sea un triángulo $\blacktriangle := \triangle(a, b, c)$ arbitrario en Ω. Se distingirán cuatro casos.

Caso 1: $\alpha \notin \blacktriangle$.

Podemos seleccionar un abierto $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$, tal que $\blacktriangle \subset \widetilde{\Omega}$ y $\alpha \notin \widetilde{\Omega}$. Ocurre que

$$f \in \mathcal{H}\left(\widetilde{\Omega}\right) \ \text{y} \ \blacktriangle \subset \widetilde{\Omega},$$

luego, aplicando el teorema anterior,

$$\int_{\partial \blacktriangle} f = 0.$$

Caso 2: $\alpha \in \{a, b, c\}$; por ejemplo, $\alpha = a$.

Elijamos puntos $x \in]\alpha, b[$ e $y \in]\alpha, c[$; y consideremos la triangulación

$$[\alpha, x, y, \alpha], [x, b, y, x], [y, b, c, y].$$

Así, después de las cancelaciones convenientes (el recorrido en la triangulación será:

$$\alpha \to x \to y \to \alpha \to x \to b \to y \to x \to \alpha \to y \to b \to c \to y \to \alpha)$$

y de aplicar el caso 1, tendremos:

$$\int_{\partial\blacktriangle} f = \int_{[\alpha,x,y,\alpha]} f.$$

Ahora, por argumentos de continuidad de f sobre compactos:

$$\exists M > 0 : |f(z)| \leq M, \forall z \in \blacktriangle.$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\blacktriangle} f \right| &= \left| \int_{[\alpha,x,y,\alpha]} f \right| \leq M \ \mathrm{long}\left([\alpha,x,y,\alpha]\right) \\ &= M\left(|\alpha - x| + |x - y| + |y - \alpha|\right), \end{aligned}$$

para cualesquiera puntos $x \in \,]\alpha, b[$ e $y \in \,]\alpha, c[$; luego haciendo $x, y \to \alpha$, tenemos que

$$\left| \int_{\partial\blacktriangle} f \right| \to 0.$$

Caso 3: $\alpha \in \partial\blacktriangle \setminus \{a, b, c\}$. Supongamos que $\alpha \in \,]a, b[$.

Consideremos la triangulación dada por

$$\alpha \to c \to a \to \alpha \to b \to c \to \alpha.$$

Surgen así triángulos $\blacktriangle_1 := \triangle(a, \alpha, c)$ y $\blacktriangle_2 := \triangle(\alpha, b, c)$ tales que se les puede aplicar el caso 2:

$$\int_{\partial\blacktriangle} f = \int_{\partial\blacktriangle_1} f + \int_{\partial\blacktriangle_2} f = 0.$$

Caso 4: $\alpha \in \overset{\circ}{\blacktriangle}$

Triangulando de la forma

$$a \to b \to \alpha \to a \to \alpha \to b \to c \to \alpha \to a \to \alpha \to c \to a,$$

nos aparecen tres triángulos en las condiciones del caso 2. **Q.E.D.**

Nota: se le da el adjetivo de "pseudo-extensión" al teorema anterior debido a que, realmente, si bien a primera vista parece que estamos generalizando el teorema de Cauchy para el triángulo, se verá (más adelante) que esta aparente rebaja no lo es tal: el punto excepcional α, donde la función continua f deja de ser holomorfa, no puede darse. En cualquier caso, esta formulación nos resultará apropiada para la demostración de la fórmula de Cauchy para la circunferencia (llamada también teorema local o versión elemental de la fórmula de Cauchy).

El siguiente resultado, que nos dará la tesis deseada (a saber, que $\int_\gamma f = 0$) impondrá codiciones sobre el abierto Ω. Lo curioso será que su demostración está sustentada sobre el teorema de Cauchy-Goursat (que imponía las restricciones sobre la curva γ).

Definición. Sean un dominio Ω y un punto del mismo $\alpha \in \Omega$. Diremos que Ω es estrellado respecto de α (o que α es un centro de estrella para Ω) si

$$[\alpha, z]^* \subset \Omega, \forall z \in \Omega.$$

Claramente, se tiene que un dominio es convexo si, y sólo si, todos sus puntos son centros de estrella.

Teorema (de Cauchy para dominios estrellados). Sean un dominio Ω estrellado y una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Entonces f admite primitiva en Ω:

$$\exists F \in \mathcal{H}(\Omega) : F' = f.$$

En particular,

$$\int_\gamma f = 0$$

para toda curva γ regular cerrada con $\gamma^* \subset \Omega$.

Demostración. La estrategia que vamos a seguir es la de aplicar convenientemente el teorema de Cauchy para el triángulo, de modo que nos resulte una fórmula susceptible de serle aplicado el lema de construcción de primitivas.

Sea α un centro de estrella para Ω. Definamos

$$F(z) := \int_{[\alpha,z]} f, \forall z \in \Omega.$$

Para $a \in \Omega$, existe $D(a,\rho) \subset \Omega$. Con $z \in D(a,\rho)$, tenemos

$$\triangle(\alpha, a, z) = \bigcup_{w \in [a,z]^*} [\alpha, w]^*.$$

(¡Acompáñate de un dibujo que te aclare la situación!) Aplicando el teorema de Cauchy para el triángulo:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{[\alpha,a,z,\alpha]} f = \int_{[\alpha,a]} f + \int_{[a,z]} f + \int_{[z,\alpha]} f \\ &= F(a) + \int_{[a,z]} f - F(z); \end{aligned}$$

luego

$$F(z) = F(a) + \int_{[a,z]} f, \forall z \in \Omega,$$

de donde aplicando el lema de construcción de primitivas, se tiene lo deseado. **Q.E.D.**

No tiene ningún problema aceptar el siguiente enunciado:

Teorema (Pseudo-extensión del teorema de Cauchy para dominios estrellados). Sean un dominio estrellado en un punto α y una función $f \in \mathcal{C}(\Omega) \cap \mathcal{H}(\Omega \setminus \{\alpha\})$. Entonces

$$\exists F \in \mathcal{H}(\Omega) : F' = f.$$

Y como los discos son dominios estrellados:

Corolario Las funciones holomorfas admiten, localmente, primitiva.

Corolario Si f es una función entera ($f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$), entonces

$$\int_\gamma f = 0$$

para cualquier curva γ regular a trozos y cerrada en el plano $\mathbb{C}$.

El siguiente lema es importante en sí mismo, y de vital importancia en el desarrollo posterior de la teoría:

Lema Para $r > 0$ y $a \in \mathbb{C}$, se tiene que

$$\int_{C(a,r)} \frac{dw}{w-z} = i2\pi, \qquad \forall z \in D(a,r).$$

Demostración. Sean $z \in D(a,r)$ y $w \in C(a,r)^*$ arbitrarios. Como

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)+(a-z)} = \frac{\frac{1}{w-a}}{1-\frac{z-a}{w-a}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}},$$

ocurrirá que

$$\left| \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} \right| = \frac{|z-a|^n}{r^{n+1}} = \frac{1}{r} \left(\frac{|z-a|}{r} \right)^n,$$

luego hay convergencia puntual de la serie en todo z punto del disco $D(a,r)$.

Pero hay más: aplicando el test de Weierstrass,

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}$$

uniformemente sobre la curva $C(a,r)$. Ésto, nos permite conmutar serie e integral:

$$I := \int_{C(a,r)} \frac{dw}{w-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (z-a)^n \int_{C(a,r)} \frac{dw}{(w-a)^{n+1}}.$$

Ahora, para $n = 0$:

$$I = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = i2\pi;$$

y para $n \in \mathbb{N}$:

$$w \to \frac{1}{(w-a)^{n+1}}$$

es una función definida en el abierto $\mathbb{C}\backslash\{a\}$, que admite primitiva

$$w \to -\frac{1}{n}\frac{1}{(w-a)^{n}};$$

luego

$$\int_{C(a,r)} \frac{dw}{(w-a)^{n+1}} = 0,$$

de donde se sigue lo deseado. **Q.E.D.**

El resultado cumbre de este tema llega ahora. La clave: la convexidad de los discos del plano; es decir, que sean estrellados en todos sus puntos.

Teorema (Fórmula de Cauchy para la circunferencia, versión elemental o local de la fórmula de Sean un abierto Ω del plano $\mathbb{C}$, una función holomorfa en él, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y un disco cerrado en él contenido $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$. Entonces

$$i2\pi f(z) = \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}dw, \qquad \forall z \in D(a,r).$$

Demostración. Consideremos $z \in D(a,r)$, fijo pero arbitrario. Podemos encontrar $\rho > r$ tal que $D(a,\rho) \subset \Omega$. Esto nos interesa para poder definir una función auxiliar

$$g(w) := \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} ..., & w \in D(a,\rho)\backslash\{z\} \\ f'(z) ......, & w = z \end{cases}.$$

Esta función cae en las hipótesis del teorema de pseudo-extensión para dominios estrellados (¡obsérvalo con detalle!); luego

$$0 = \int_{C(a,r)} g = \int_{C(a,r)} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw = \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}dw - f(z)\int_{C(a,r)} \frac{dw}{w-z},$$

de donde, aplicando el lema anterior, se tiene la fórmula buscada. **Q.E.D.**

Notas:

1. La sospecha de que la bondad de la función del integrando la hereda la propia f será la línea de trabajo en el siguiente tema (4.3) para obtener la analiticidad de las funciones holomorfas (Teorema de Taylor).

2. Que el comportamiento de la función f sobre la circunferencia ∂D determine su comportamiento sobre todo el disco D, será el objetivo del tema 4.4 (Principio de Identidad).

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y sean $a, b \in \mathbb{C}$, con $a \neq b$, y $R > \max\{|a|, |b|\}$. Prueba que
$$\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = i2\pi \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$
Deduce, a partir de este hecho, que toda función entera y acotada es constante.

2. (*Índice de un punto respecto de una curva*) Sea $K \subset \mathbb{C}$ un conjunto compacto y conexo del plano complejo. Demuestra que, para cualesquiera $a, b \in K$ y cualquier γ camino cerrado (o sea, curva regular a trozos y cerrada) tal que $\gamma^* \cap K = \varnothing$, se tiene
$$\operatorname{Ind}(\gamma, a) = \operatorname{Ind}(\gamma, b),$$
donde
$$\operatorname{Ind}(\gamma, z) := \frac{1}{i2\pi} \int_\gamma \frac{dw}{w-z}, \qquad \forall z \in \mathbb{C} \backslash \gamma^*.$$
Deduce de este hecho que la función
$$f(z) := \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}$$
admite primitiva holomorfa φ en el abierto $\mathbb{C} \backslash K$, verificando
$$\exp(\varphi(z)) = \frac{z-a}{z-b}, \forall z \in \mathbb{C} \backslash K.$$
(Para la primera parte, razona cómo se debe comportar la función Ind sobre cada una de las dos componentes conexas de $\mathbb{C} \backslash \gamma^*$.)

3. Sea γ la curva dada por la mitad superior de la elipse
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$
y el segmento $[-a, a]$, recorrida en el sentido inverso de las agujas del reloj. Calcula
$$\int_\gamma \cos(z) \, dz.$$

4. Sea $\gamma^* := [i, 1] = \{(1-t) i + t : t \in [0, 1]\}$. Prueba que para $z \in \gamma^*$,
$$\left|z^4\right| \geq \frac{1}{4},$$
y deduce de ahí que
$$\left| \int_\gamma \frac{1}{z^4} dz \right| \leq 4\sqrt{2}.$$
¿Cuál es el verdadero valor de $\int_\gamma \frac{1}{z^4} dz$?

5. Para $r > 1$, se definen:

$$I(r) := \int_{C(0,R)} \frac{z}{z^3+1} dz; \qquad J(r) := \int_{[-r,-r+i]} \frac{z^2 e^z}{z+1} dz.$$

   Prueba que

$$\lim_{r \to +\infty} I(r) = \lim_{r \to +\infty} J(r) = 0.$$

6. Calcula la integral

$$\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$$

   donde $\gamma(t) := \cos t + \frac{i}{2} \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$.

7. Prueba que para una función continua $f : D(a,r) \to \mathbb{C}$, se tiene

$$i2\pi f(a) = \lim_{r \to 0} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-a} dw.$$

   Compara este resultado con el caso en el que f sea holomorfa en a.

8. Para $\gamma := C(a,R)$ y $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \backslash \gamma^*$, calcula los posibles valores de la integral

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

   en función de la posición relativa de los puntos z_1 y z_2 respecto de γ.

9. Calcula la integral

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$$

   para

$$\gamma := C\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

10. Para $0 < r \neq 2$, calcula la integral

$$\int_{C(0,r)} \frac{z+1}{z(z^2+4)} dz.$$

11. Calcula, con $n \in \mathbb{N}$, la siguiente integral:

$$\int_{C(1,\frac{1}{2})} \frac{\log(z)}{z^n} dz.$$