Tema 4.1: Integral curvilínea. Caracterización de la existencia de primitiva

Facultad de Ciencias Experimentales, Curso 2008-09

E. de Amo

En este tema se afronta el problema que en Variable Real se conoce como Teorema Fundamental del Cálculo: existencia o no de primitiva (y su caracterización) para una función dada. Al igual que en el caso real, habremos de definir el concepto de integral, ahora ya en sentido complejo; y, por tanto, la integración a lo largo de curvas aparecerá de modo natural.

Este problema se encuentra en la base de la llamada Teoría de las Funciones Analíticas, estudiada por Cauchy (allá por 1840). La condición que caracterizará la existencia de primitiva será la tesis que aparecerá en las próximas lecciones, en los llamados teoremas de tipo Cauchy; a saber, que

$$\int_\gamma f = 0$$

donde f será una función holomorfa en un abierto Ω del plano complejo y γ un camino en Ω, más una hipótesis adicional que precisaremos (unas veces sobre el dominio, otras sobre la función, otras sobre el camino).

Observación: nótese lo poco práctico que resultaría estar a la espera de probar este tipo de hipótesis (¡para toda función y para todo camino, dado un abierto!, por ejemplo). Nuestra esperanza es de tipo teórico: encontrar esas hipótesis adicionales y lograr dicha condición. Por tanto, un plan de trabajo podría ser (y va a serlo) el siguiente:

1. Daremos la definición de integral de Riemann para funciones complejas de variable real: $\int_a^b f \in \mathbb{C}$.
2. Definiremos la integral a lo largo de una curva regular a trozos: $\int_\gamma f \in \mathbb{C}$.
3. Estudiaremos la dependencia de $\int_\gamma f$ respecto de la curva γ; y así, podremos considerar la función

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(w)\, dw.$$

Integral de Riemann de funciones complejas de variable real.

Definición. Sea una función $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$. Diremos que f es integrable Riemann en $[a, b]$ si las funciones reales de variable real $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ lo son (en el sentido ya estudiado en una variable real). En este caso, llamamos integral de la tal función al número complejo

$$\int_a^b f := \int_a^b (\operatorname{Re} f) + i \int_a^b (\operatorname{Im} f).$$

(Siempre que se pueda, se evitará la expresión $\int_a^b f(t)dt$ en favor de $\int_a^b f$.) Denotaremos por $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}([a,b])$ a la clase de todas las funciones complejas integrables Riemann en $[a,b]$.

Definición. Sean una función $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ y $P := \{t_0, t_1, ..., t_n\} \in \pi([a,b])$, una partición de $[a,b]$. Diremos del complejo α que es una suma integral de f respecto de P, si existen $x_1, x_2, ..., x_n \in [a,b]$ tales que

$$x_k \in [t_{k-1}, t_k], k = 1, 2, ..., n \qquad \text{y} \qquad \alpha = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(t_k - t_{k-1}).$$

Notaremos por $\sum(f,P)$ al conjunto de todas las sumas integrales de f respecto de la partición P.

Proposición. Sea una función $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$. Son equivalentes:

i. La función f es integrable.

ii. Existe un complejo I tal que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : P \in \pi([a,b]), \left. \begin{array}{c} \text{diám}(P) < \delta \\ \alpha \in \sum(f,P) \end{array} \right\} \Longrightarrow |\alpha - I| < \varepsilon.$$

Demostración. i. $\Longrightarrow$ ii. es evidente. Por otro lado, para probar ii. $\Longrightarrow$ i., basta caer en la cuenta de que si $\alpha \in \sum(f,P)$, entonces $\operatorname{Re}\alpha \in \sum(\operatorname{Re} f, P)$ e $\operatorname{Im}\alpha \in \sum(\operatorname{Im} f, P)$. ■

Teorema de Lebesgue. Sea una función $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ acotada. La condición necesaria y suficiente para que $f \in \mathcal{R}_{\mathbb{C}}([a,b])$ es que el conjunto de puntos de discontinuidad de f sea un conjunto de medida nula.

Demostración. Llamemos $D(f)$ al tal conjunto. Como se tiene

$$D(f) = D(\operatorname{Re} f) \cup D(\operatorname{Im} f),$$

podemos aplicar lo que sabemos de la integral de Riemann en una variable real. ■

Enunciamos a continuación algunas consecuencias de este hecho sobre las propiedades de $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}([a,b])$.

Proposición. La clase $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}([a,b])$ es un álgebra y el funcional $f \longrightarrow \int_a^b f$ es lineal.

Demostración. La linealidad del funcional definido sobre $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}([a,b])$ es evidente. Para escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, las funciones $\alpha f + \beta g$ y fg están acotadas si lo están, a su vez, f y g. Además, si son elementos de $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}([a,b])$, como

$$D(\alpha f + \beta g) \subset D(f) \cup D(g) \text{ y } D(fg) \subset D(f) \cup D(g),$$

se tiene lo deseado. ■

Ahora, una propiedad de "modularidad":

Proposición. Si $f \in \mathcal{R}_{\mathbb{C}}([a,b])$, entonces $|f| \in \mathcal{R}_{\mathbb{C}}([a,b])$. Además,

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Demostración. El teorema de Lebesgue nos proporciona la modularidad de $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}([a,b])$. Para el "además", pongamos

$$\int_a^b f := \rho e^{i\theta}; \rho := \left| \int_a^b f \right|.$$

Como

$$\rho = e^{-i\theta} \int_a^b f = \int_a^b e^{-i\theta} f \in \mathbb{R},$$

entonces (ojo, que no hay cuidado con el orden: ahora estamos trabajando con reales):

$$\rho = \int_a^b e^{-i\theta} f = \int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} f\right) \leq \int_a^b \left|e^{-i\theta} f\right|;$$

por tanto, lo deseado. ■

Algunos resultados se pueden obtener bajo la sencilla consideración de las partes real e imaginaria de la función a tratar:

Proposición. Sean $f \in \mathcal{R}_{\mathbb{C}}([a,b])$ y $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$. Si el conjunto

$$\{x \in [a,b] : f(x) \neq g(x)\}$$

es finito, entonces $g \in \mathcal{R}_{\mathbb{C}}([a,b])$ y las integrales coinciden.

Proposición. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $\alpha := \min\{a,b,c\}, \beta := \max\{a,b,c\}$. Si $f \in \mathcal{R}_{\mathbb{C}}([\alpha,\beta])$, entonces la tres integrales siguientes tienen sentido, y se verifica la fórmula:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Regla de Barrow. Sea una función $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ derivable. Supongamos que $F' \in \mathcal{R}_{\mathbb{C}}([a,b])$. Entonces:

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a).$$

Teorema del cambio de variable. Sea una función $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monótona y derivable. Supongamos que $\varphi' \in \mathcal{R}_{\mathbb{C}}([a,b])$. Sea ahora una función $f : \varphi([a,b]) \longrightarrow \mathbb{C}$ integrable. Entonces se tienen:

i. $(f \circ \varphi)\, \varphi' \in \mathcal{R}_{\mathbb{C}}([a,b])$

ii. $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f = \int_a^b (f \circ \varphi)\, \varphi'$.

Integración sobre curvas.

Definición. Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva regular a trozos (o sea, un camino). Si f es una función compleja de variable compleja, llamaremos integral de f sobre γ al número complejo

$$\int_\gamma f := \int_a^b (f \circ \varphi)\, \varphi'.$$

Está plenamente justificada la coherencia de esta definición: $f \circ \gamma$ es continua en $[a,b]$ y γ' está definida, salvo un número finito de puntos; consecuentemente $(f \circ \varphi)\, \varphi' \in \mathcal{R}_{\mathbb{C}}([a,b])$.

Ejemplo. Sea el segmento $[z,w]^* \subset \mathbb{C}$. La curva $[z,w]$ por él determinada, es regular. Si f es una función continua sobre el segmento dado, entonces

$$\int_{[z,w]} f = \int_0^1 f\left[(1-t)\, z + tw\right](w-z)\, dt.$$

Proposición. Sea γ una curva regular atrozos y sea $\mathcal{C}(\gamma^*)$ la clase de todas las funciones complejas definidas sobre γ^*. El funcional sobre la tal clase, dado por la expresión

$$f \longrightarrow \int_\gamma f$$

es lineal y continuo. En particular:

$$\left| \int_\gamma f \right| \leq \|f\| \;\operatorname{long}(\gamma),$$

donde $\|f\|$ es el máximo de la función f sobre (el compacto) γ^*.

Demostración. La linealidad es evidente. Para la continuidad, razonamos así:

$$\begin{aligned} \left| \int_\gamma f \right| &= \left| \int_a^b (f \circ \varphi)\, \varphi' \right| \leq \int_a^b |f \circ \varphi|\, |\varphi'| \leq \\ &\leq \int_a^b \|f\|\, |\varphi'| = \|f\| \;\operatorname{long}(\gamma), \end{aligned}$$

luego continuidad. ■

Definición. Dos curvas regulares a trozos se dicen equivalentes si existe un difeomorfismo de clase 1, y (estrictamente) creciente, que transforma una en otra. Si llamamos γ_1 y γ_2 a las dos tales curvas, denotaremos $\gamma_1 \sim \gamma_2$.

Nótese que $\gamma_1 \sim \gamma_2 \implies \gamma_1^* = \gamma_2^*$, pero el recíproco es falso.

Proposición. Si $\gamma_1 \sim \gamma_2$ y $f \in \mathcal{C}(\gamma_1^*)$, entonces

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f.$$

Es decir, sobre curvas regulares a trozos la función continua a integrar no depende de la parametrización que se haga de la curva.

Demostración. Todo es elemental haciendo uso del teorema de cambio de variables. Llamemos φ al difeomorfismo de $[a,b]$ en $[c,d]$ tal que $\gamma_2 \circ \varphi = \gamma_1$:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} f &= \int_c^d (f \circ \gamma_2)\, \gamma_2' = \int_a^b (f \circ \gamma_2 \circ \varphi)\, (\gamma_2' \circ \varphi)\, \varphi' = \\ &= \int_a^b (f \circ \gamma_1)\, \gamma_1' = \int_{\gamma_1} f. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Proposición. Si γ es una curva regular a trozos y $f \in \mathcal{C}(\gamma^*)$, entonces

$$\int_{-\gamma} f = -\int_{\gamma} f.$$

Demostración. Cálculos elementales, como en la demostración anterior:

$$\begin{aligned}\int_{-\gamma} f(z)\, dz &= \int_a^b [f \circ (-\gamma)](t)\, (-\gamma')(t)\, dt \\ &= -\int_a^b f(\gamma(b-a+t))\, \gamma'(t)\, dt \\ &= -\int_a^b f(\gamma(s))\, \gamma'(s)\, ds = -\int_{\gamma} f. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

¡Aquí ha sido clave que el difeomorfismo que transforma γ en su opuesta no sea creciente!

Proposición. Sean $\gamma_1 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ y $\gamma_2 : [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$ dos curvas regulares a trozos tales que $\gamma_2(c) = \gamma_1(b)$. Si $f \in \mathcal{C}(\gamma_1^* \cup \gamma_2^*)$, entonces:

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f.$$

Demostración. Una vez más, el teorema del cambio de variables (usadoen el segundo sumando para la última igualdad, con el cambio $s := t - b + c$) nos dará lo deseado:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1+\gamma_2} f &= \int_a^{b+d-c} [f \circ (\gamma_1+\gamma_2)] (\gamma_1+\gamma_2)' \\
&= \int_a^{b} [f \circ (\gamma_1+\gamma_2)] (\gamma_1+\gamma_2)' + \int_b^{b+d-c} [f \circ (\gamma_1+\gamma_2)] (\gamma_1+\gamma_2)' \\
&= \int_a^{b} (f \circ \gamma_1) (\gamma_1)' + \int_b^{b+d-c} (f \circ \gamma_2) (\gamma_2)' = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

En la siguiente proposición nos detenemos en la integración sobre caminos (curvas cerradas regulares a trozos); y nos va a decir que, en esos casos, la integración será independiente del punto que escojamos como inicio y final del recorrido.

Proposición. Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva regular a trozos cerrada. Para $c \in \,]a,b[$, sea la nueva curva

$$\sigma : [c, b+c-a] \longrightarrow \mathbb{C}$$

dada por

$$\sigma(t) := \begin{cases} \gamma(t) ..., & c \le t \le b \\ \gamma(t-b+a) ..., & b \le t \le b+c-a. \end{cases}$$

(Nótese que $\sigma^* = \gamma^*$.) Si $f \in \mathcal{C}(\gamma^*)$, entonces

$$\int_\sigma f = \int_\gamma f.$$

Demostración. Son cálculos (con un cambio de variable, $s := t + a - b$, cómo no):

$$\begin{aligned}
\int_\sigma f &= \int_c^{c+b-a} (f \circ \sigma) \sigma' = \int_c^{b} (f \circ \sigma) \sigma' + \int_b^{c+b-a} (f \circ \sigma) \sigma' \\
&= \int_c^{b} (f \circ \gamma) \gamma' + \int_b^{c+b-a} (f \circ \gamma) \gamma' = \int_c^{b} (f \circ \gamma) \gamma' + \int_a^{c} (f \circ \gamma) \gamma' \\
&= \int_a^{b} (f \circ \gamma) \gamma' = \int_\gamma f. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Caracterización de la existencia de primitiva.

Lema. Sean Ω un abierto del plano, f una función continua en el abierto y F otra función holomorfa en el abierto y tal que $F'(z) = f(z)$ en todo punto del abierto. Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega$ un camino. Entonces:

$$\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Demostración. Con la ayuda de la regla de Barrow para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f &= \int_a^b (f\circ\gamma)\,\gamma' = \int_a^b f(\gamma)\,\gamma' = \int_a^b F'(\gamma)\,\gamma' \\ &= \int_a^b (F\circ\gamma)' = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Acabamos de probar que si una función admite primitiva, su integral no depende, para nada, del recorrido de la curva, sólo de sus valores extremos. En consecuencia, una condición necesaria para la existencia de primitiva es que su integral no dependa del camino que se recorre. Así, si el camino es cerrado, su integral será nula. Casos particulares, destacables, se explicitan en los siguientes corolarios.

Corolario. Sean $p:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ un polinomio y $C(a,r)$ una circunferencia cualesquiera. Entonces:

$$\int_{C(a,r)} p = 0.$$

Corolario. Para cualquier camino cerrado en $\mathbb{C}$:

$$\int_\gamma dz = \int_\gamma z dz = 0.$$

Demostración. Es consecuencia del corolario anterior; pero si se quiere una demostración autónoma, basta considerar los casos respectivos en los que F sea una correspondiente primitiva y aplicar el lema a cada una de ellas:

$$z \longrightarrow z \text{ y } z \longrightarrow \frac{z^2}{2}. \qquad \blacksquare$$

La propiedad dada por el lema anterior caracteriza, de hecho, la existencia de primitiva:

Lema de construcción de Primitivas. Sean $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C},\ f \in \mathcal{C}(\Omega)$, y $F:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$. Supongamos que

$$\forall\beta\in\Omega, \exists\rho>0 : D(\beta,\rho)\subset\Omega$$

y

$$F(z) = F(\beta) + \int_{[\beta,z]} f, \qquad \forall z\in D(\beta,\rho).$$

Entonces, f admite primitiva en Ω; concretamente:

$$F\in\mathcal{H}(\Omega) \text{ y } F'(z) = f(z), \forall z\in\Omega$$

Demostración. Sea β fijo, pero arbitrario, en Ω. Objetivo: probar que F es derivable en β con $F'(\beta) = f(\beta)$. Por la continuidad de f, y con la notación de la hipótesis, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta \in]0, \rho[$ tal que

$$|w - \beta| < \delta \implies |f(w) - f(\beta)| < \varepsilon.$$

Razonamos para $|z - \beta| < \delta$:

$$\begin{aligned}
|F(z) - F(\beta) - f(\beta)(z - \beta)| &= \left| \int_{[\beta,z]} f - f(\beta)(z-\beta) \right| \\
&= \left| \int_{[\beta,z]} f - \int_{[\beta,z]} f(\beta) \right| = \left| \int_{[\beta,z]} [f - f(\beta)] \right| \\
&\leq \int_{[\beta,z]} |f - f(\beta)| \leq \varepsilon \, |\beta - z| \, ,
\end{aligned}$$

luego

$$z \longrightarrow \beta \implies \left| \frac{F(z) - F(\beta)}{z - \beta} - f(\beta) \right| \longrightarrow 0,$$

y, por tanto, existe $F'(\beta) = f(\beta)$. La arbitrariedad de β nos da lo deseado en Ω. ■

Teorema. Sean $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Son equivalentes:

- **i.** f admite primitiva en Ω.
- **ii.** $\int_\gamma f = 0$ para todo camino cerrado con soporte en Ω.

Demostración. i. $\implies$ ii. ya nos lo dió la consecuencia de un lema anterior. Probemos ahora, con la ayuda del lema de construcción de primitivas, que ii. $\implies$ i. No hay pérdida de generalidad si suponemos que Ω es un dominio (¿por qué?): para α y z en Ω, sea γ_z cualquier camino (de soporte) en Ω de origen α y extremo z. Definamos

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f.$$

Veamos que, en efecto, podemos considerarla como una buena definición; es decir, que no depende del recorrido escogido para ir de α a z. Si γ y σ son dos tales caminos, el nuevo camino $\gamma + (-\sigma)$, será cerrado; luego:

$$0 = \int_{\gamma+(-\sigma)} f = \int_\gamma f + \int_{-\sigma} f \implies \int_\gamma f = -\int_{-\sigma} f = \int_\sigma f.$$

Vamos ya a probar la derivabilidad de F: para $\beta \in \Omega$, existe $\rho > 0$ tal que $D(\beta, \rho) \subset \Omega$. Sea $z \in \Omega$, arbitrario:

$$F(z) = \int_{\gamma_\beta + [\beta,z]} f = F(\beta) + \int_{[\beta,z]} f,$$

luego el lema de construcción de primitivas nos da lo deseado. ■

Ya es sabido por nosotros, pero ahora lo probaremos con otras técnicas, que:

Corolario. La función $z \longrightarrow \frac{1}{z}$ no admite primitiva en ningún abierto que contenga a la circunferencia unidad $\mathbb{T}$.

Demostración. Como

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{dz}{z} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = i2\pi \neq 0,$$

no verifica ii. en el teorema anterior y, por tanto, tampoco i. ■

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Dibuja las siguientes curvas:

   (a) $\gamma(t) := a\cos t + ib\sin t, \qquad \forall t \in [0, 2\pi], \ (a, b > 0)$

   (b) $\gamma(t) := a\cosh t + ib\sinh t, \qquad \forall t \in [0, +\infty[, \ (a, b > 0)$

   (c) $\gamma(t) := at + i\frac{a}{t}, \qquad \forall t > 0, \ (a > 0)$

   (d) $\gamma(t) := t\cos t + it\sin t, \qquad t \in [0, 2\pi]$; determina su longitud.

2. Para $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, determina la longitud de la curva

   $$\Lambda(a, b) := \left\{ e^{t+it}; t \in [a, b] \right\}.$$

   Calcula

   $$\lim_{a \to -\infty} \Lambda(a, b).$$

3. Sea una curva diferenciable de clase $\mathcal{C}^1([a, b])$, $\gamma(t) := (x(t), y(t))$. Prueba que:

   (a) la curva γ es *rectificable*; es decir

   $$\sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|; \{t_0, t_1, ..., t_n\} \in \pi([a, b]) \right\} < +\infty;$$

   (b) su longitud viene dada por

   $$\text{long } (\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

   (c) no toda curva es rectificable. Considera, para ello, la curva

   $$\gamma(t) := (x(t), y(t))$$

   dada por

   $$x(t) := t, \quad y(t) := \begin{cases} t\sin\left(\frac{1}{t}\right) \text{....} t \in \left]0, 1\right] \\ 0 \text{...............} t = 0 \end{cases}$$

4. Encuentra la longitud de las siguientes curvas:

   (a) $\gamma(t) := re^{it}, t \in [0, 2\pi]$ (circunferencia de centro en el origen y radio r; es decir, $r\mathbb{T}$)

   (b) $\gamma(t) := t - ie^{-it}, t \in [0, 2\pi]$ (la *cicliode*; haz un representación de ella.)

5. Sea la función
$$f(z) := \frac{z^3 - 4z + 1}{(z^2+5)(z^3-3)}$$
y la curva γ dada por la circunferencia de centro 0 y radio r, $\gamma(t) := re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Prueba que
$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \frac{\pi r\left(r^3 + 4r + 1\right)}{(r^2-5)(r^3-3)}.$$

6. Para $x, y \in \mathbb{R}$, prueba que
$$|\sin(x+iy)| \leq \sqrt{\cosh 2y}.$$
Considera ahora la curva γ dada por la suma, en este orden, de los segmentos
$$\begin{aligned}\gamma_1 &:= [-a+ia, -a-ia]\\ \gamma_2 &:= [-a-ia, a-ia]\\ \gamma_3 &:= [a-ia, a+ia].\end{aligned}$$
Prueba que
$$\left|\int_\gamma \sin\left(z^2\right) dz\right| \leq 6a\sqrt{\cosh(4a^2)}.$$

7. Sea el dominio $\Omega := \mathbb{C}\setminus\{-i, i\}$ y la función
$$f(z) := \frac{1}{1+z^2}, \forall z \in \Omega.$$
Prueba que f no admite primitiva en Ω.