Tema 2.2: Funciones multiformes elementales. Logaritmos y potencias. Ramas uniformes

Facultad de Ciencias Experimentales, Curso 2008-09

E. de Amo

En esta lección se hace hincapié en un concepto que encierra cierta dificultad: el de multifunción. En nuestro recorrido ya hemos conocido a la función argumento: ella está en la base de dicho concepto, pues recordemos que consistía en asociar a cada punto un conjunto, y después, elegir (según nuestros objetivos) una de entre las llamadas determinaciones (continuas y, a la postre,) holomorfas, o ramas uniformes, para el dominio del plano $\mathbb{C}$ en el que estemos interesados.

Las funciones de base o exponente complejos (las potenciales y exponenciales, respectivamente) también aparecerán entre el elenco de funciones multiformes que presentamos.

Completaremos la lección con el estudio de algunas transformaciones destacadas entre dominios del plano. El papel estrella de las funciones exponencial y logaritmo principal se hará manifiesto.

La "dificultad" a la que nos referíamos más arriba, surge de una natural consideración que no se puede evitar; y que es, a saber, el dar la siguiente

Definición. Dado un complejo z diremos que otro complejo w es un logaritmo para z si $e^w = z$.

Como $e^w \neq 0$ (sea quien sea w), es claro que $z = 0$ no tiene logaritmo. Si $z \neq 0$, llamamos $\mathrm{Log}(z)$ al conjunto de sus logaritmos:

$$\mathrm{Log}\,(z) := \{w \in \mathbb{C} : e^w = z\}\,.$$

Y observamos que los tales w que le corresponden al z dado forman un conjunto infinito:

$$\begin{aligned}\{w \in \mathbb{C} : e^w = z\} &= \{\ln|z| + i\arg(z) + i2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} = \\ &= \{\ln|z| + i\theta : \theta \in \ \mathrm{Arg}\,(z)\} = \\ &= \ln|z| + i\ \mathrm{Arg}\,(z)\,.\end{aligned}$$

Así, la ley $z \longrightarrow \mathrm{Log}(z)$ se puede ver como una aplicación de $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ en el grupo aditivo cociente $\mathbb{C}/i2\pi\mathbb{Z}$, tal y como se recoge en la siguiente

Proposición. Para $z, w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, se verifica que

$$\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(w)$$

(donde la suma en el segundo miembro es la del grupo cociente $\mathbb{C}/i2\pi\mathbb{Z}$).

Su demostración se reduce a recordar que la función (multiforme) argumento verificaba la propiedad recíproca. El papel que en su momento jugó el llamado argumento principal se pone ahora de relieve.

Definición. Para cada complejo no nulo z, llamaremos su logaritmo principal, y lo denotaremos por $\log(z)$, al número complejo

$$\log(z) = \ln|z| + i \arg(z).$$

Es claro que el logaritmo principal de z es un logaritmo para z, y, además, es el único de sus logaritmos cuya parte imaginaria está en $]-\pi, \pi]$. Es decir, el logaritmo principal está caracterizado por las condiciones

$$\begin{cases} \log(z) \in \operatorname{Log}(z) \\ -\pi < \operatorname{Im} \log(z) \leq \pi. \end{cases}$$

Definición. La función

$$z \longrightarrow \log(z)$$

se llama rama (o valor) principal del logaritmo.

Ojo aquí ahora: en general, no se espere que $\log(zw) = \log(z) + \log(w)$ (como tampoco se verificaba en su momento para el argumento principal la propiedad homóloga).

A continuación, damos paso al estudio de su continuidad y holomorfía.

Como la función $z \longrightarrow \ln|z|$ es continua en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, resultará que la rama principal del logaritmo será continua allí, y sólo allí, donde lo sea la rama principal del argumento:

Lema. La rama principal del logaritmo es continua en $\mathbb{C}\backslash(\mathbb{R}^- \cup \{0\})$ (no siendo continua en ningún punto de $\mathbb{R}^-$).

De hecho, vamos a demostrar, muy pronto, que $z \longrightarrow \log z$ es holomorfa en todo $\mathbb{C}\backslash(\mathbb{R}^- \cup \{0\})$; pero ésto va a ser consecuencia de un resultado más general. Dado un abierto Ω del plano $\mathbb{C}$, cabe preguntarse si existe una función continua $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\exp(f(z)) = z$ para cada punto del abierto (problema de existencia de logaritmo continuo). Y de modo más ambicioso, ¿cabe esperar que tal f sea holomorfa? Para la función identidad es el llamado "Problema de existencia o admisión de logaritmo holomorfo". Pues bien, sorprendentemente, caso de haber logardo lo primero, lo segundo se obtiene de modo automático:

Proposición. Sean $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$ y $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega)$, tal que $e^{\varphi(z)} = z, \forall z \in \Omega$. Entonces $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ y verifica

$$\varphi'(z) = \frac{1}{z}, \forall z \in \Omega.$$

Demostración. Sea $a \in \Omega$, fijo, pero arbitrario. Veamos que φ es derivable en a, luego será holomorfa (¿por qué?, ¡actualiza conceptos elementales!) y verificará ahí la fórmula. Sea $(a_n) \subset \Omega \backslash \{a\}$ tal que $a_n \longrightarrow a$. Llamemos $b_n := \varphi(a_n)$ y $b := \varphi(a)$. Por argumentos de continuidad, $b_n \longrightarrow b$; y como $b_n \neq b$ (si $\varphi(a_n) = \varphi(a) \implies e^{\varphi(a_n)} = e^{\varphi(a)} \implies a_n = a$, absurdo), se tiene que

$$\frac{\varphi(a_n) - \varphi(a)}{a_n - a} = \frac{b_n - b}{e^{b_n} - e^b} = \frac{1}{\frac{e^{b_n} - e^b}{b_n - b}} \longrightarrow \frac{1}{e^b} = \frac{1}{a};$$

luego existe $\varphi'(a) = \frac{1}{a}$. **Q.E.D.**

Corolario. La rama principal del logaritmo log es una función holomorfa en $\mathbb{C} \backslash (\mathbb{R}^- \cup \{0\})$, con

$$\log'(z) = \frac{1}{z}, \forall z \in \mathbb{C} \backslash \left(\mathbb{R}^- \cup \{0\}\right).$$

Demostración. Basta recordar la continuidad del logaritmo principal en $\mathbb{C} \backslash (\mathbb{R}^- \cup \{0\})$, y entonces aplicar la proposición anterior. ■

Acabamos de probar cómo la existencia de logaritmo holomorfo (de hecho, ha bastado que sea continuo) conlleva la existencia de primitiva para la función $z \longrightarrow \frac{1}{z}$. El recíproco, también vale:

Proposición. Sea $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$ tal que $0 \notin \Omega$. Sea $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\varphi'(z) = \frac{1}{z}, \forall z \in \Omega$. Entonces existe una función $\lambda : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ constante en cada componente conexa de Ω, y tal que

$$\exp(\varphi(z) + \lambda(z)) = z, \forall z \in \Omega.$$

Demostración. Consideremos la función auxiliar $g(z) := ze^{-\varphi(z)}, \forall z \in \Omega$. Resulta de pura rutina comprobar que se trata de una función constante sobre cada componente conexa de Ω que no se anula en ninguna de ellas (¡pruébese con detalle!). Podemos, por tanto, considerar la función

$$\lambda : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}; \qquad \lambda(z) := \log(g(z)), \forall z \in \Omega$$

de modo que sea constante en cada componente conexa del abierto. Además,

$$\exp(\varphi(z) + \lambda(z)) = e^{\varphi(z)} e^{\lambda(z)} = e^{\varphi(z)} g(z) = z, \forall z \in \Omega$$

tal y como queríamos probar. ■

La función λ, en la demostración anterior, es holomorfa en Ω (es constante en entornos de cada punto). A continuación enumeramos una serie de propiedades equivalentes, y que irán conformando la colección que se irá ampliando a medida en que vaya desarrollándose este curso (hasta culminar en el teorema, fundamental, de la representación conforme de Riemann de clasificación de los dominios simplemente conexos del plano complejo).

Corolario. Sea $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$ tal que $0 \notin \Omega$. Son equivalentes:

i. Existe una determinación continua del argumento; es decir:

$$\exists \theta \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}) : z = |z|\, e^{i\theta(z)}, \forall z \in \Omega \text{ (o sea, } \theta(z) \in \operatorname{Arg}(z), \forall z \in \Omega)$$

ii. Existe una determinación continua del logaritmo; es decir:

$$\exists \varphi \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C}) : \exp \varphi(z) = z, \forall z \in \Omega$$

iii. Existe una determinación holomorfa del logaritmo; es decir:

$$\exists \varphi \in \mathcal{H}(\Omega) : \exp \varphi(z) = z, \forall z \in \Omega$$

iv. La función $z \longrightarrow 1/z$ admite una primitiva; es decir:

$$\exists \psi \in \mathcal{H}(\Omega) : \psi'(z) = 1/z, \forall z \in \Omega$$

Demostración. Después de lo ya sabido, bastará con probar i. $\Longleftrightarrow$ ii. Para i. $\Longrightarrow$ ii., considérese la función φ como la rama del logaritmo determinada por la tal θ:

$$\varphi(z) := \ln|z| + i\theta(z), \forall z \in \Omega.$$

Y para ii. $\Longrightarrow$ i., el argumnto será, ¡cómo no!, el determinado por la parte imaginaria del logaritmo dado:

$$\theta(z) := \operatorname{Im} \varphi(z), \forall z \in \Omega. \qquad \blacksquare$$

Es sabido que la primera afirmación en el corolario anterior (y, por tanto, las otras tres) es cierta cuando a $\mathbb{C}$ le suprimimos cualquier semirrecta que parta del origen. Más adelante veremos que no se puede llegar a afirmar tal propiedad cuando $\Omega := \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Desarrollos en serie del logaritmo.

A continuación perseguimos un estudio analítico (esto es, mediante desarrollo en series de potencias) del logaritmo (principal). Comencemos observando que, si $0 \notin D(a, r)$ entonces siempre podremos afirmar la existencia de un logaritmo holomorfo sobre dicho disco: basta considerar una semirrecta que, partiendo del origen, no corte al disco; aplicando el corolario anterior se obtiene una rama holomorfa del logaritmo.

Pues bien, este hecho lo vamos a probar otra vez, usando ahora las series de potencias. Este pequeño entretenimiento en probar algo ya sabido tendrá su recompensa: obtendremos la analiticidad de la rama principal del logaritmo en $\mathbb{C}\backslash(\mathbb{R}^- \cup \{0\})$.

Lema. Para cada complejo no nulo a:

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} (z-a)^n, \forall z \in D(a, |a|).$$

Demostración. Sabido es que la serie geométrica $\sum w^n$ tiene radio de convergencia 1. Además,

$$(1-w) \sum_{k=0}^{n} w^k = 1 - w^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall w \in \mathbb{C}.$$

Como quiera que $w^{n+1} \longrightarrow 0$ en $\mathbb{D}$, se tiene que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w^n = \frac{1}{1-w}, \forall w \in \mathbb{D}.$$

Dados $a \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ y $z \in D(a, |a|)$, tomemos $w := -\frac{z-a}{a}$. Se tendrá:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} (z-a)^n = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{+\infty} w^n = \frac{1}{a} \frac{1}{1 - \left(-\frac{z-a}{a}\right)} = 1/z. \qquad \blacksquare$$

Proposición. Para cada complejo no nulo a la función

$$f(z) := \log(a) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{na^n} (z-a)^n, \forall z \in D(a, |a|),$$

es un logaritmo holomorfo de la identidad (en dicho disco); es decir:

$$f \in \mathcal{H}(D(a, |a|)) \text{ y } \exp(f(z)) = z, \forall z \in D(a, |a|).$$

Demostración. Por ya conocidos, son evidentes algunos hechos: por un lado, la serie de potencias de la hipótesis tiene radio de convergencia $|a|$. Por otro lado, la función f dada está bien definida y es holomorfa en dicho disco; y, por el lema anterior, sabemos calcular su derivada:

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} (z-a)^n = 1/z, \forall z \in D(a, |a|).$$

Por tanto, la proposición anterior nos garantiza, dada la conexión de $D(a, |a|)$, que existe una (función) constante λ tal que

$$\exp(f(z) + \lambda) = z, \forall z \in D(a, |a|).$$

Haciendo $z = a$, tenemos $e^{\log(a)+\lambda} = a$; luego $e^{\lambda} = 1$, de donde

$$z = e^{f(z)+\lambda} = e^{f(z)} e^{\lambda} = e^{f(z)}, \forall z \in D(a, |a|). \qquad \blacksquare$$

Corolario. Para $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, sea $r_a := \begin{cases} |a| \ldots, & \operatorname{Re} a \geq 0 \\ |\operatorname{Im} a| \ldots, & \operatorname{Re} a < 0 \end{cases}$. Entonces:

$$\log(z) = \log(a) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{na^n} (z-a)^n, \forall z \in D(a, r_a).$$

En particular, tenemos que el logaritmo principal es una función analítica en $\mathbb{C}\backslash(\mathbb{R}^- \cup \{0\})$.

Demostración. Para $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ es evidente que $r_a > 0$ y $D(a, r_a) \subset \mathbb{C}\backslash(\mathbb{R}^- \cup \{0\})$. Así, el logaritmo principal es continuo en el disco $D(a, r_a)$. Igual le ocurre a la función que aparece en el segundo miembro de la igualdad a demostrar, llamémosla f (¡en un arrojo de originalidad!). Como

$$\log'(z) = f'(z) = 1/z, \forall z \in D(a, r_a)$$

habrán de diferir en una constante sobre el disco. Pero como $f(a) = \log(a)$, dicha constante ha de ser nula. **Q.E.D.**

A continuación nos proponemos generalizar todo lo probado para la función identidad, ahora para funciones holomorfas arbitrarias; por ejemplo, dada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, ¿existe $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $e^\varphi = f$?

Logaritmos (continuos y) holomorfos de una función.

Teorema. Sean $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que f admite logaritmo continuo en Ω; es decir,

$$\exists \varphi \in \mathcal{C}(\Omega) : \exp \varphi = f.$$

Entonces, φ es, de hecho, holomorfa y verifica la relación:

$$\varphi'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}, \forall z \in \Omega.$$

Demostración. Obsérvese que podemos suponer $0 \notin f(\Omega)$ (¿por qué?). Sean $a \in \Omega$ y $b := f(a) \neq 0$. Consideremos, por una parte, (pues existe) un logaritmo holomorfo h para la identidad en $D(b, |b|)$:

$$h \in \mathcal{H}(D(b, |b|)) : e^{h(z)} = z, \forall z \in D(b, |b|).$$

Por otro lado, y con argumentos de continuidad de f en a,

$$\exists \delta > 0 : |z - a| < \delta \implies z \in \Omega \text{ y } f(z) \in D(b, |b|).$$

Sea ahora la función

$$\psi : D(a, \delta) \longrightarrow \mathbb{C}; \qquad \psi(z) := h(f(z)), \forall z \in D(a, \delta).$$

Así la hemos definido para que verifique que:

$$\psi \in \mathcal{H}(D(a, \delta)) \text{ y } \exp \psi(z) = f(z), \forall z \in D(a, \delta).$$

Consecuentemente, si $z \in D(a,\delta)$, entonces $\exp\psi(z) = f(z) = \exp\varphi(z)$; de donde se sigue que

$$z \in D(a,\delta) \implies \varphi(z) - \psi(z) \in i2\pi\mathbb{Z}.$$

Como la función $\frac{\varphi-\psi}{i2\pi}$ es continua en (el conexo) $D(a,\delta)$, si sólo toma valores enteros habrá de ser constante:

$$\exists k \in \mathbb{Z} : \varphi(z) = \psi(z) + i2\pi k, \forall z \in D(a,\delta).$$

Conseguimos, así, gracias a la naturaleza de la función ψ, la holomorfía para φ. Pero como a era arbitrario en todo Ω, se sigue que $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Finalmente, como $f = e^{\varphi}$, se sigue, derivando en ambos miembros, que

$$f'(z) = \varphi'(z)e^{\varphi(z)} = \varphi'(z)f(z), \qquad \forall z \in \Omega;$$

es decir,

$$\varphi'(z) = f'(z)/f(z), \qquad \forall z \in \Omega$$

(donde hemos vuelto a usar que f no se anula en Ω). **Q.E.D.**

Ahora para f, como antes para la identidad, se tiene este recíproco:

Teorema. Sean $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $0 \notin f(\Omega)$. Supongamos que la derivada logarítmica de f admite primitiva; es decir:

$$\exists\varphi \in \mathcal{H}(\Omega) : \varphi'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}, \forall z \in \Omega.$$

Entonces, existe λ una función (holomorfa) constante en cada componente conexa de Ω tal que

$$\exp[\varphi(z) + \lambda(z)] = f(z), \forall z \in \Omega.$$

Demostración. Se considerará la función auxiliar

$$g(z) := e^{-\varphi(z)}f(z), \forall z \in \Omega.$$

Tal función es (¡pruébese!) constante en cada componente conexa de Ω y se puede hacer

$$\lambda(z) := \log(g(z)), \forall z \in \Omega,$$

(justifica que g no se anula) para concluir el resultado. ■

Y todo lo anterior se resume en el siguiente

Corolario. Sean $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $0 \notin f(\Omega)$. Para f, son equivalentes que:

i. admite argumento continuo en Ω; es decir:

$$\begin{array}{lll} \exists\theta & \in & \mathcal{C}(\Omega,\mathbb{R}) : f(z) = |f(z)|\, e^{i\theta(z)}, \forall z \in \Omega \\ (& \implies & \theta(z) \in \operatorname{Arg}(f(z)), \forall z \in \Omega). \end{array}$$

ii. admite logaritmo continuo en Ω; es decir:

$$\exists\varphi \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C}) : \exp\varphi(z) = f(z), \forall z \in \Omega.$$

iii. admite logaritmo holomorfo en Ω; es decir:

$$\exists\varphi \in \mathcal{H}(\Omega) : \exp\varphi(z) = f(z), \forall z \in \Omega.$$

iv. su derivada logarítmica admite primitiva en Ω; es decir:

$$\exists\psi \in \mathcal{H}(\Omega) : \psi'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}, \forall z \in \Omega.$$

Potencias de base y exponente complejos.
En el Análisis Real, de la consideración de

$$a^b : a > 0, b \in \mathbb{R}$$

surgen dos familias importantísimas de funciones:

$$\begin{array}{lll} x & \longrightarrow & a^x, \text{ las exponenciales, y} \\ x & \longrightarrow & x^b, \text{ las potenciales.} \end{array}$$

Cada una de ellas tiene propiedades algebraicas características, repectivamente:

$$\begin{array}{rcl} a^{x+y} & = & a^x a^y \\ (xy)^b & = & x^b y^b \end{array}$$

¿Se podrá extender la consideración de estas funciones al campo complejo? La consideración de la fórmula

$$a^b = e^{b\ln a} : a > 0, b \in \mathbb{R}$$

y el carácter multiforme del logaritmo nos darán la solución. (Recordemos en este momento que, en general, es falsa la expresión $\log zw = \log(z) + \log(w)$ para complejos no nulos z y w.)

Definición. Para $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ y $w \in \mathbb{C}$, definimos el conjunto $P_w(z)$ de las potencias de base z y exponente w como:

$$e^{w\ \mathrm{Log}(z)} = \{e^{wu} : u \in \ \mathrm{Log}(z)\} = \left\{e^{w(\ln|z| + i\arg(z) + i2k\pi)} : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Ocurre que la periodicidad de la función exponencial reduce, a posteriori, el número de elementos del conjunto $P_w(z)$. Además, tal número no dependerá de z y será fácilmente deducible.

Proposición. Sea $w \in \mathbb{C}$. Entonces:

a. Son equivalentes:

i. Existe $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ tal que $P_w(z)$ es finito.

ii. $P_w(z)$ es finito para todo $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

iii. $w \in \mathbb{Q}$.

b. Si $w \notin \mathbb{Q}$, entonces, para cada $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, la aplicación

$$k \longrightarrow e^{w(\ln|z|+i\arg(z)+i2k\pi)},$$

de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{C}$, es inyectiva.

c. Si $w \in \mathbb{Q}$, con $w = \frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ y expresión irreducible), entonces, para cada $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, el conjunto $P_w(z)$ tiene, exactamente, q elementos; a saber,

$$\left\{e^{w(\ln|z|+i\arg(z)+i2k\pi)} : k = 0, 1, 2, ..., q-1\right\}.$$

Demostración. Sean $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, k, j \in \mathbb{Z}$ y supongamos

$$e^{w(\ln|z|+i\arg(z)+i2k\pi)} = e^{w(\ln|z|+i\arg(z)+i2j\pi)}.$$

Pero si así fuese:

$$e^{i2k\pi w} = e^{i2j\pi w} \implies i2k\pi w = i2j\pi w + i2\pi m : m \in \mathbb{Z} \implies w(k-j) = m,$$

de modo que

$$w \notin \mathbb{Q} \implies k = j,$$

y, por tanto, la afirmación b. queda probada y, de propina, i. $\implies$ iii. en a., también.

Si $w \in \mathbb{Q}$, con $w = \frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ y expresión irreducible) para cada $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, pongamos

$$u_k := e^{w(\ln|z|+i\arg(z)+i2k\pi)}, k \in \mathbb{Z}.$$

Como podemos escribir $k = cq + r : c, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < q$, tendremos:

$$\begin{aligned} u_k \quad : &= \exp\left[\frac{p}{q}\left(\ln|z| + i\arg(z) + i2(cq+r)\pi\right)\right] \\ &= \exp\left[\frac{p}{q}\left(\ln|z| + i\arg(z) + i2r\pi\right)\right]\exp\left[\frac{p}{q}\left(i2cq\pi\right)\right] \\ &= \exp\left[\frac{p}{q}\left(\ln|z| + i\arg(z) + i2r\pi\right)\right]\exp\left[i2cp\pi\right] \\ &= \exp\left[\frac{p}{q}\left(\ln|z| + i\arg(z) + i2r\pi\right)\right] =: u_r, \end{aligned}$$

luego iii. $\implies$ ii. en a.; y como ii. $\implies$ i. es trivial, a. queda completamente probado.

El propio razonamiento anterior nos dice que

$$P_w(z) = \{u_0, u_1, ..., u_{q-1}\}.$$

Veamos que todos los elementos de ese conjunto son distintos dos a dos. Si

$$u_r = u_s : 0 \leq s \leq r < q,$$

habrá de ocurrir que, para algún entero m:

$$\frac{p}{q} ir 2\pi = \frac{p}{q} is 2\pi + i2m\pi,$$

luego $p(r-s) = mq$, de donde q divide a $p(r-s)$; luego divide a $r-s$. Ahora bien, $0 \leq r-s < q$; de donde se sigue que $r-s=0$. ■

Esta proposición nos habilita para dar la siguiente

Definición (del Valor principal de la potencia). Para $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ y $w \in \mathbb{C}$, se define el valor principal de la potencia de base z y exponente w por la fórmula

$$z^w := e^{w \log(z)}.$$

Algunas observaciones sobre esta definición:

1. Extiende la ya conocida de base real positiva y exponente real:

$$z \in \mathbb{R}^+, w \in \mathbb{R} \implies z^w = e^{w \log(z)} = e^{w \ln|z|} = |z|^w.$$

2. Si $z := e$, se tratará de la propia exponencial compleja de exponente w.
3. Si $w \in \mathbb{Z}$, entonces z^w no es ni más ni menos que lo que cabría esperar:

$$\begin{array}{rcl} w & = & n \in \mathbb{N} \implies z^n = z \overset{n)}{\ldots} z \\ z^0 & = & 1, \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \\ z^{-n} & = & 1/z^n, \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \forall w \in \mathbb{C} \end{array}$$

Funciones exponenciales y potenciales complejas.

Dado $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, tenemos dos caminos por los que andar si queremos definir la función exponencial compleja de base a; a saber:

$$\begin{array}{rl} \text{1. la función:} & z \longrightarrow a^z := e^{z \log(a)} \\ \text{2. la multifunción:} & z \longrightarrow P_z(a) = e^{z\ \mathrm{Log}(a)} \end{array}$$

Y la misma notación parece sugerir que va a ser la primera de ellas. La razón no será estética. En efecto, pues en la segunda habría que renunciar a la perfección algebraica propia de las exponenciales:

$$z, w \in \mathbb{C} \implies a^{z+w} = a^z a^w,$$

dado que

$$P_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}(1) = P_1(1) = \{1\} \neq \{1, -1\} = P_{\frac{1}{2}}(1)\, P_{\frac{1}{2}}(1).$$

Queda así plenamente justificada la opción a tomar.

Definición. Dado $a \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, llamamos función exponencial de base a a la función de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, dada por

$$z \longrightarrow a^z := e^{z \log(a)}.$$

Proposición. Dado $a \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, la función exponencial de base a es una función entera con función derivada

$$z \longrightarrow \log(a)\, a^z.$$

Su demostración no exige mayor dificultad; lo que sí va a probarse es la analiticidad en todo el plano $\mathbb{C}$ de las funciones exponenciales:

Proposición. Dado $a \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, la función exponencial de base a es una función analítica en todo el plano $\mathbb{C}$.

Demostración. Sea $b \in \mathbb{C}$, fijo, pero arbitrario. Para $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} a^z &= a^{z-b+b} = a^b e^{(z-b)\log(a)} \\ &= a^b \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (\log(a))^n (z-b)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^b (\log(a))^n}{n!} (z-b)^n . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Sorprendentemente, la situación se invierte radicalmente cuando lo que se persigue es la definición apropiada de las funciones potenciales: para $\alpha \in \mathbb{C}$, las candidaturas presentadas a funciones potenciales son, igualmente, dos. Y otra vez, las mismas de antes:

1. la función: $\quad z \longrightarrow z^\alpha := e^{\alpha \log(z)}$
2. la multifunción: $\quad z \longrightarrow P_\alpha(z) = e^{\alpha \operatorname{Log}(z)}$

Como la primera de ellas conlleva a irregularidades algebraicas imperdonables, por ejemplo:

$$-1 = ii = \sqrt{-1}\sqrt{-1} \neq \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1,$$

quedará descartada; aún más cuando para la segunda de ellas se tiene que

Proposición. Si $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces, para $z, w \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, se tiene

$$P_\alpha(zw) = P_\alpha(z)\, P_\alpha(w).$$

Demostración. Se reduce a meros cálculos derivados de la definición y de las propiedades del logaritmo:

$$\begin{aligned} P_\alpha(zw) &= e^{\alpha \operatorname{Log}(zw)} = e^{\alpha[\operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(w)]} = \\ &= \left\{ e^{\alpha(u+v)} : u \in \operatorname{Log}(z), v \in \operatorname{Log}(w) \right\} = \\ &= \{ e^{\alpha u} e^{\alpha v} : u \in \operatorname{Log}(z), v \in \operatorname{Log}(w) \} = \\ &= e^{\alpha \operatorname{Log}(z)} e^{\alpha \operatorname{Log}(w)} = P_\alpha(z)\, P_\alpha(w). \end{aligned}$$

■

Por tanto, vamos a aceptar el carácter multiforme, también, para las funciones potenciales:

Definición. Para $\alpha \in \mathbb{C}$, llamamos función potencial de base α a la función multiforme

$$z \longrightarrow P_{\alpha}(z), \forall z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}.$$

La rama principal de dicha función está dada por la elección del logaritmo principal:

$$z \longrightarrow z^{\alpha} = e^{\alpha \log(z)}, \forall z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}.$$

Proposición. (Caso particular, ¡importantísimo!: $\alpha = 1/n, n \in \mathbb{N}$) Para $n \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, se tiene que

$$P_{\frac{1}{n}}(z) = \{w \in \mathbb{C} : w^n = z\}.$$

En particular, todo complejo no nulo z tiene, exactamente, n raíces n-ésimas distintas, que vienen dadas por

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ e^{\frac{1}{n}(\log(z)+i2k\pi)} : k = 0, 1, 2, ..., n-1 \right\}.$$

Demostración. El conjunto $P_{\frac{1}{n}}(z)$ tiene, exactamente, n elementos, mientras que $\{w \in \mathbb{C} : w^n = z\}$ tiene, a lo sumo, n elementos. Bastará, por tanto, probar que el primero es subconjunto del segundo. Pero esto es evidente: si $u \in P_{\frac{1}{n}}(z)$, entonces $u = e^{\frac{1}{n}t}$, con $t \in \mathrm{Log}(z)$. Por tanto: $u^n = e^t = z$. ■

El carácter multiforme de una función lleva consigo la necesidad de seleccionar ramas continuas u holomorfas que determinen una función genuina en un dominio en el que podamos estar interesados. Pero, surge una pregunta natural. Por ejemplo, ¿cuándo es posible seleccionar una rama holomorfa de la función potencia? Una limitación la encontramos en la información aportada por la siguiente

Proposición. No existen raíces cuadradas continuas sobre la circunferencia unidad; es decir:

$$\nexists \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T}) : \varphi^2(z) = z, \forall z \in \mathbb{T}.$$

Demostración. Razonamos por reducción al absurdo: supongamos que existe una tal función φ. Sea ψ el valor principal de la raíz cuadrada:

$$\psi(z) := z^{\frac{1}{2}} := e^{\frac{1}{2}\log(z)}, \forall z \in \mathbb{C} \backslash \left(\mathbb{R}^- \cup \{0\}\right).$$

En particular, $\varphi^2 = \psi^2$ sobre $\mathbb{T} \backslash \{-1\}$, donde ambas, φ y ψ, son continuas (razona poqué lo es cada una de ellas). Por tanto,

$$(\varphi(z) + \psi(z))(\varphi(z) - \psi(z)) = 0, \forall z \in \mathbb{T} \backslash \{-1\}.$$

Pero ocurre que $\mathbb{T}\backslash\{-1\}$ es unión disjunta de los conjuntos:

$$\begin{aligned} A &:= \{z \in \mathbb{T}\backslash\{-1\} : \varphi(z) + \psi(z) = 0\} \text{ y} \\ B &:= \{z \in \mathbb{T}\backslash\{-1\} : \varphi(z) - \psi(z) = 0\}. \end{aligned}$$

Se trata de conjunto cerrados en $\mathbb{T}\backslash\{-1\}$ (razónese). Argumentos de conexión (sobre $\mathbb{T}\backslash\{-1\}$) nos llevan a que $\mathbb{T}\backslash\{-1\} = A$ o bien $\mathbb{T}\backslash\{-1\} = B$.

En cualquiera de los dos casos, por la continuidad de φ, la función ψ tendría límite en -1; pero esto nos lleva a un absurdo:

$$\begin{aligned} e^{i\left(\pi-\frac{1}{n}\right)} &\longrightarrow e^{i\pi} = -1 \Longrightarrow \psi\left(e^{i\left(\pi-\frac{1}{n}\right)}\right) \longrightarrow e^{i\frac{\pi}{2}} = i \\ e^{i\left(-\pi+\frac{1}{n}\right)} &\longrightarrow e^{-i\pi} = -1 \Longrightarrow \psi\left(e^{i\left(-\pi+\frac{1}{n}\right)}\right) \longrightarrow e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

La información sobre ramas holomorfas la completamos con los dos siguientes resultados:

Proposición (Existencia de raíces n-ésimas holomorfas). Sea $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$ tal que $0 \notin \Omega$. Supongamos que la identidad admite logaritmo holomorfo:

$$\exists \varphi \in \mathcal{H}(\Omega) : \exp(\varphi(z)) = z, \forall z \in \Omega.$$

Entonces, para cada natural n existe $\varphi_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que

$$[\varphi_n(z)]^n = z, \forall z \in \Omega.$$

Demostración. Basta considerar $\varphi_n := \exp\left(\frac{1}{n}\varphi\right)$, para cada natural n. $\blacksquare$

Corolario. En los abiertos que contengan a la circunferencia unidad no es posible elegir ramas continuas (y, por supuesto, tampoco holomorfas) del argumento (ni, por tanto, del logaritmo).

Transformaciones geométricas mediante funciones elementales.

Es importante cómo actúan algunas funciones (que vamos a usar profusamente) sobre determinadas regiones del plano. Las que nos van a interesar se ven afectadas por la siguiente

Definición. Dos abiertos Ω_1 y Ω_2 del plano se dicen isomorfos si existe una biyección $\varphi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ tal que

$$\varphi \in \mathcal{H}(\Omega_1) \text{ y } \varphi^{-1} \in \mathcal{H}(\Omega_2).$$

A la tal φ la llamaremos isomorfismo (de Ω_1 en Ω_2, o entre Ω_1 y Ω_2).

Se trata de una relación de equivalencia que se introduce en la familia de los abiertos del plano complejo $\mathbb{C}$: dos abiertos isomorfos serán indistinguibles desde el punto de vista de la llamada Teoría de Funciones Holomorfas.

Proposición. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, con $-\pi \leq \alpha < \beta \leq \pi$. Entonces, la función exponencial es un isomorfismo de la banda

$$\Omega_1 := \{z \in \mathbb{C} : \alpha < \operatorname{Im} z < \beta\}$$

en la región angular

$$\Omega_2 := \{z \in \mathbb{C} \backslash \{0\} : \alpha < \arg(z) < \beta\}.$$

Demostración. Claramente exp y log son inversas la una de la otra y holomorfas, respectivamente, en Ω_1 y Ω_2. (Obsérvese que $\Omega_2 \subset \mathbb{C} \backslash (\mathbb{R}^- \cup \{0\})$.) Por tanto, bastará con probar que $\exp(\Omega_1) \subset \Omega_2$ y $\log(\Omega_2) \subset \Omega_1$.

Por un lado:

$$\begin{aligned} z \in \Omega_1 &\Longrightarrow \operatorname{Im} z \in \operatorname{Arg}(e^z) \Longrightarrow \operatorname{Arg}(e^z) \cap]\alpha, \beta[\neq \emptyset \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \arg(e^z) \in]\alpha, \beta[\iff \exp(z) \in \Omega_2. \end{aligned}$$

Y, por otro lado:

$$z \in \Omega_2 \Longrightarrow \operatorname{Im} \log(z) = \arg(z) \in]\alpha, \beta[\iff \log(z) \in \Omega_1. \qquad \blacksquare$$

Por tanto, y salvo giros o traslaciones, podemos establecer isomorfismos entre bandas y regiones angulares cuando las amplitudes respectivas lo permitan. Ahora bien, la anchura de la banda puede alterarse mediante conveniente homotecia de razón $\rho > 0$, pues transforma la banda

$$\{z \in \mathbb{C} : \alpha < \operatorname{Im} z < \beta\}$$

en la nueva banda

$$\{z \in \mathbb{C} : \alpha\rho < \operatorname{Im} z < \beta\rho\}.$$

Por tanto, podríamos transformar regiones angulares de distinta amplitud, las unas en las otras, mediante la siguiente composición de isomorfismos:

$$z \longrightarrow \log(z) \longrightarrow \rho \log(z) \longrightarrow e^{\rho \log(z)}$$

... ¡que no es ni más ni menos que la rama principal de la potencia!

Corolario. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, con $-\pi \leq \alpha < \beta \leq \pi$. Sea $\rho > 0$, tal que $\rho\alpha, \rho\beta \in [-\pi, \pi]$. Entonces, la rama principal de la potencia

$$z \longrightarrow z^\rho$$

es un isomorfismo entre las regiones angulares

$$\{z \in \mathbb{C} \backslash \{0\} : \alpha < \arg(z) < \beta\} \text{ y } \{z \in \mathbb{C} \backslash \{0\} : \rho\alpha < \arg(z) < \rho\beta\}.$$

Demostración. Con $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, se tiene que $z^\rho = e^{\rho \log(z)}$. Sea φ la homotecia de razón $\rho > 0$. En conclusión, la siguiente composición

$$\begin{array}{c} \{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : \alpha < \arg(z) < \beta\} \\ \downarrow \log \\ \{z \in \mathbb{C} : \alpha < \operatorname{Im} z < \beta\} \\ \downarrow \varphi \\ \{z \in \mathbb{C} : \rho\alpha < \operatorname{Im} z < \rho\beta\} \\ \downarrow \exp \\ \{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : \rho\alpha < \arg(z) < \rho\beta\} \end{array}$$

nos da lo deseado: $f = e^{\varphi \circ \log}$. ■

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Pruébese que la función $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, dada por

$$f(z) := \log(1 - z), \qquad \forall z \in \mathbb{D}$$

es holomorfa en $\mathbb{D}$, y calcúlese su derivada f'. Dedúzcanse las fórmulas

a. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -\log(1 - z), \quad \forall z \in \mathbb{D};$
b. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{n} = -\ln 2 \left|\sin \frac{\theta}{2}\right|, \quad 0 < |\theta| \leq \pi;$
c. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}, \quad 0 < \theta < 2\pi.$

2. Pruébese que para $\theta \in]-\pi, \pi[$, se tiene

a. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos n\theta = \ln 2 \cos \frac{\theta}{2};$ b. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\theta = \frac{\theta}{2}.$

3. Sea $\Omega := \mathbb{C}\backslash \{iy : y \in \mathbb{R}, |y| \geq 1\}$. Pruébese que existe una función f holomorfa en Ω que verifica

$$\sin[f(z)] = z \cos[f(z)], \forall z \in \Omega; \qquad \text{y} \quad f(x) = \arctan x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Compruébese que

$$f'(z) = \frac{1}{1 + z^2}, \forall z \in \Omega$$

y dedúzcase

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n + 1}, \forall z \in \mathbb{D}.$$

4. Compruebe que todos los valores de la función Arccos están contenidos en la fórmula

$$\operatorname{Arc}\cos z = \pm i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right),$$

donde por $\sqrt{z^2 + 1}$ se entiende uno de sus valores.

5. Sea la función $f(z) := \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right), \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{-1,1\}$. Pruébese que f es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}$ y en $\mathbb{D}$. Pruébese que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right), \forall z \in \mathbb{D}$$

y aplíquese este resultado para obtener la suma de las series siguientes (para $0 < \theta < \pi$):

a. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+1}$; b. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1}$.

6. Encuéntrese, para z y α complejos, la relación existente entre los conjuntos

a. $z^{2\alpha}$; b. $(z^{\alpha})^2$; c. $(z^2)^{\alpha}$.

7. Construýase un isomorfismo de la banda $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z < 1\}$ sobre la región angular $\left\{z \in \mathbb{C}\setminus\{1\} : 0 < \arg(z-1) < \frac{\pi}{4}\right\}$ y otro de esta misma región angular sobre el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$.

8. Pruébese que

$$\log(rz) = \ln r + \log z, \qquad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}, \forall r \in \mathbb{R}^+.$$

¿Para qué valores de $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ se verifica que

$$\log iz = \log i + \log z?$$

En general, ¿qué condición deben verificar $z, w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ para que se tenga

$$\log(zw) = \log z + \log w?$$

9. Halle todos los valores de las siguientes funciones:

a. $\operatorname{Arc}\sin\frac{1}{2}$; b. $\operatorname{Arc}\cos\frac{1}{2}$; c. $\operatorname{Arc}\cos 2$; d. $\operatorname{Arc}\sin i$;
e. $\operatorname{Arc}\tan(1+i2)$; f. $\operatorname{Arc}\cosh i2$; g. $\operatorname{Arc}\tanh(1-i)$.