1 Grafos: Primeras definiciones

Definición 1.1 *Un grafo G se define como un par (V, E), donde V es un conjunto cuyos elementos son denominados vértices o nodos y E es un subconjunto de pares no ordenados de vértices y que reciben el nombre de aristas o arcos.*

Si $V = \{v_1, \cdots, v_n\}$, los elementos de E se representa de la forma $\{v_i, v_j\}$, donde $i \neq j$. Los elementos de una arista o arco se denominan extremos de dicha arista. Dos vértices v_i y v_j se dicen adyacentes si $\{v_i, v_j\} \in E$.

Un grafo $G = (V, E)$ se dice finito si V es un conjunto finito.

Definición 1.2 *Un multigrafo G se define, al igual que un grafo, por un par (V, E) donde V es el conjunto de vértices o nodos y E el de aristas o arcos, pero con la salvedad de que en este caso el conjunto E puede contener mas de una arista cuyos extremos son los mismos, así como aristas del tipo $\{v_i, v_i\}$ denominadas lazos.*

Dado G un grafo es posible hacerle corresponder una matriz. Dicha matriz $M = (m_{ij})$ viene definida por $m_{ij} = 1$ en caso de que los vértices v_i y v_j sean adyacentes y 0 en caso contrario. Es claro pues que la matriz de adyacencias de un grafo es siempre una matriz simétrica.

Definición 1.3 *Sea $G = (V, E)$ un grafo. Un subgrafo de G es un par (V', E') donde $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$ y para cada elemento de E', sus extremos están en V'. Si E' contiene todos los elementos de E cuyos extremos están en V', entonces se llama subgrafo generado por V'.*

Definición 1.4 *Sea $G = (V, E)$ un grafo. Un camino en el grafo G es una sucesión en la que aparecen de forma alternativa elementos de V y de E de la forma $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \cdots, v_{n-1}e_nv_n$ con $v_i \in V$ para $i = 0, \cdots, n$ y $e_j \in E$ para $j = 1, \cdots, n$. y donde v_{i-1} es adyacente con v_i mediante la arista e_i. El número de arcos que componen un camino se denomina longitud de dicho camino.*

Definición 1.5 *Sea G un grafo y sea*

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \cdots, v_{n-1}e_nv_n$$

un camino en G. Se dice que dicho camino es un camino cerrado si $v_0 = v_n$. En caso contrario se denomina camino abierto que conecta v_0 con v_n.

Definición 1.6 *Sea G un grafo y sea*

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \cdots, v_{n-1}e_nv_n$$

un camino en G. Se dice que dicho camino es un camino simple si todos los arcos que aparecen en el mismo son distintos. Se dice que un camino es una trayectoria si todos los vértices que aparecen son distintos. De este modo, toda trayectoria es un camino simple.

Se dice que tal camino es un ciclo cuando todos los vértices que aparecen en el mismo son distintos salvo $v_0 = v_n$. Un ciclo de longitud n se denomina n-ciclo.

Definición 1.7 *Se dice que G es un grafo conexo si para cualquier par de vértices de G existe una trayectoria entre ellos. Un subgrafo de un grafo no conexo G se dice que es una componente conexa de G si es, en sí mismo, un grafo conexo.*

Definición 1.8 *Sea G un grafo. La distancia entre dos vértices de G es el mínimo de las longitudes de todas las trayectorias entre dichos vértices. El máximo de las distancias entre todos los vértices de G se denomina diámetro de G.*

Proposición 1.9 *Sea G un grafo y u y v elementos de V. Existe un camino entre u y v si y sólo si existe una trayectoria entre u y v.*

Teorema 1.10 *Sea M la matriz de un grafo G. Entonces el elemento m_{ij} de la matriz M^n proporciona el número de caminos de longitud n entre el vértice v_i y el v_j.*

2 Grado de un vértice

Definición 2.1 *Sea* G *un grafo y* $v \in V$*. Se define el grado de* v *como el número de aristas de las cuales es extremo* v*.*

Proposición 2.2 *La suma de los grados de un grafo* G *es igual al doble de los elementos de* E*.*

Definición 2.3 *Un grafo* G *se dice que es un grafo de Euler si existe un camino cerrado en* G *de manera que contiene a todas las aristas de* G *exactamente una sola vez.*

Teorema 2.4 *Un grafo* G *es de Euler si y sólo si* G *es conexo y el grado de todos sus vértices es par.*

Definición 2.5 *Un grafo conexo* G *se dice recorrible si existe un camino abierto entre dos vértices que contiene todas las aristas de* G*.*

Corolario 2.6 *Un grafo G es recorrible si y sólo si contiene exactamente dos vértices de grado impar.*

Definición 2.7 *Un grafo conexo G se dice de Hamilton si contiene un ciclo que pasa por cada uno de los vértices exactamente una vez. Dicho ciclo recibe el nombre de ciclo de Hamilton.*

Definición 2.8 *Sea G un grafo, con $|V| = n$. Se dice que G es un grafo completo si grado(v)$= n - 1$ para todo $v \in V$. El grafo completo con n vértices se denota por K_n.*

Corolario 2.9 *Todo grafo completo es conexo.*

Definición 2.10 *Sea G un grafo. Se dice que G es regular si grado(v)$= k$ para todo $v \in V$. En ese caso se dice que G es k-regular.*

3 Grafos bipartidos

Definición 3.1 *Sea G un grafo. Se dice que G es un grafo bipartido si existen dos subconjuntos disjuntos V_1 y V_2 de V tales que $V_1 \cup V_2 = V$ y cada arista tiene por extremos un elemento de V_1 y otro de V_2.*

Un grafo se dice bipartido completo si todo vértice de V_1 es adyacente con todo vértice de V_2 y viceversa. El grafo bipartido completo con $|V_1| = n$ y $|V_2| = m$ se denota por $K_{n,m}$

Teorema 3.2 *Un grafo G es bipartido si y sólo si no contiene ciclos de longitud impar.*

Definición 3.3 *Sea G un grafo. Una coloración propia de G ocurre cuando se asignan colores a los vértices de G de modo que si u y v son adyacentes, entonces u y v tengan colores distintos asignados. El número mínimo de colores necesarios para una coloración propia de un grafo es lo que se conoce como* **número cromático** *del grafo.*

Corolario 3.4 *Un grafo es bipartido si y sólo si es 2-coloreable, es decir, su número cromático es 2.*

Definición 3.5 *Sea G un grafo bipartido con $V = V_1 \cup V_2$. Un emparejamiento de V_1 en V_2 de G es un subconjunto de E tal que todo elemento de V_1 es extremo de una arista.*

Teorema 3.6 (Condición de diversidad). *Sea G un grafo bipartido con $V = V_1 \cup V_2$. Existe un emparejamiento de V_1 en V_2 de G si y sólo si para cada subconjunto S de V_1, el cardinal de dicho subconjunto S es menor o igual que el cardinal del subconjunto de V_2 formando por aquellos vértices de V_2 que son adyacentes con algún elemento de S.*

Corolario 3.7 *Sea G un grafo bipartido con $V = V_1 \cup V_2$. Existe un emparejamiento de V_1 en V_2 de G si existe un número entero k tal que grado(v_1)$\leq k \leq$grado(v_2) para todo $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$.*

$K_{3,3}$ es un ejemplo de grafo bipartido con emparejamiento.

4 Grafos planos

Definición 4.1 *Un grafo se dice plano si puede ser dibujado en el plano sin que se intersequen sus aristas.*

K_5 es un ejemplo de grafo no plano.

La representación plana de un grafo plano conexo divide al plano en lo que se denominan regiones.

Definición 4.2 *Se denomina grado de una región al número de aristas que conforman la frontera de la misma.*

Proposición 4.3 *La suma de los grados de las regiones de un grafo plano conexo es el doble del número de aristas de dicho grafo.*

Teorema 4.4 (Fórmula de Euler) *Sea $G = (V, E)$ un grafo plano conexo con R regiones. Entonces $|V| - |E| + R = 2$.*

Corolario 4.5 *Sea G un grafo plano conexo con p vértices y q aristas, donde $p \geq 3$. Entonces $q \leq 3p - 6$.*

Proposición 4.6 *$K_{3,3}$ y K_5 no son planos.*

Definición 4.7 *Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ dos grafos. Se dice que G y G' son isomorfos si existe una biyección f entre los conjuntos V y V' tal que si $\{u, v\} \in E$, entonces $\{f(u), f(v)\} \in E'$.*

Teorema 4.8 (de Kuratowski) *Un grafo no es plano si y sólo si contiene un subgrafo que es isomorfo a $K_{3,3}$ o K_5.*

5 Árboles

Definición 5.1 *Sea $G = (V, E)$ un grafo. Se dice que G es un árbol si es conexo y no contiene ciclos.*

Proposición 5.2 *Sean u y v dos vértices distintos de un árbol $T = (V, E)$. Entonces hay un único camino que conecta estos vértices.*

Definición 5.3 *Sean $G = (V, E)$ un grafo y $T = (V', E')$ un subgrafo de G. Se dice T es un árbol recubridor o árbol extensión de G si T es un árbol y además $V' = V$*

Teorema 5.4 *Sea $G = (V, E)$ un grafo. Entonces G es conexo si y sólo si contiene un árbol recubridor.*

Sea G un grafo conexo, el número de aristas eliminadas para la obtención del árbol recubridor de G se conoce con el nombre de número ciclotómico o rango ciclo.

Corolario 5.5 *Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo. El número ciclotómico de G es $r(G) = |E| - |V| + 1$*