Formulario 1: Tensores

1. Dimensión, orden y componentes

Dimension d	Orden m	Componentes $N = d^m$	Nombre
2	0	1	Escalar
	1	2	Vector 2D
	2	4	Tensor 2D de segundo orden
	3	8	Tensor 2D de tercer orden
	4	16	Tensor 2D de cuarto orden
	...	...	...
3	0	1	Escalar
	1	3	Vector
	2	9	Tensor de segundo orden
	3	27	Tensor de tercer orden
	4	81	Tensor de cuarto orden
	...	...	...
4	0	1	Escalar
	1	4	Cuatrivector
	2	16	Cuadritensor de segundo orden
	3	64	Cuadritensor de tercer orden
	4	256	Cuadritensor de cuarto orden
	...	...	...

2. Leyes de cambio de coordenadas

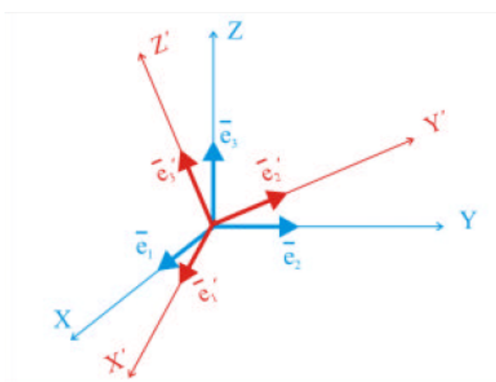

Figure 1: Cambio de coordenadas

Matriz de cambio de base:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \text{donde} \qquad a_{ij} = \hat{e}'_i \cdot \hat{e}_j = cos(\hat{e}'_i \hat{e}_j)$$

Para un tensor,

$$T'_{ijk...} = a_{ir} a_{js} a_{kt} ... T_{rst...}$$

Leyes de Transformación:

Orden m	Componentes	Transformación directa	Transformación inversa	Nombre
0	$3^0 = 1$	$a' = a$	$a = a'$	Escalar
1	$3^1 = 3$	$v'_i = a_{ij} v_j$ $\vec{v}' = A\vec{v}$	$v_i = a_{ji} v'_j$ $\vec{v} = A^t \vec{v}'$	Vector
2	$3^2 = 9$	$T'_{ij} = a_{ir} a_{is} T_{rs}$ $T' = ATA^t$	$T_{ij} = a_{ri} a_{sj} T'_{rs}$ $T = A^t T A$	Tensor de segundo orden
3	$3^3 = 27$	$T'_{ijk} = a_{ir} a_{is} a_{kt} T_{rst}$	$T_{ijk} = a_{ri} a_{sj} a_{tk} T'_{rst}$	Tensor de tercer orden
..	..	..	..	..

3. Tensores de interés

1. Tensor "Delta de Krönecker":

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \qquad \delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

- $a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}$

- $a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}$

2. Tensor "métrica":

$$g_{ij} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j \qquad g_{ij} = \delta_{ij} \text{ en una base ortonormal}$$

El elemento diferencial de distancia es: $ds^2 = g_{ij} dx_i dx_j$.

3. Tensor de Ricci:

$$s_{ij} \;=\; |\hat{e}_i \times \hat{e}_j|$$

En una base ortonormal:

$$s_{ij} \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j, \text{ permutación par} \\ -1 & \text{si } i \neq j, \text{ permutación impar} \end{cases} \qquad\qquad s_{ij} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Tensor de Ricci-Curbastro:

$$\epsilon_{ijk} \;=\; \hat{e}_i \,(\hat{e}_j \times \hat{e}_k)$$

En una base ortonormal:

$$\epsilon_{ijk} \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \text{ ó } i = k \text{ ó } j = k \\ 1 & \text{si } i \neq j \neq k, \text{ permutación par} \\ -1 & \text{si } i \neq j \neq k, \text{ permutación impar} \end{cases}$$

4. Operadores diferenciales

Gradiente sobre un escalar:

$$\operatorname{grad} f \;=\; \left(g_{ij}\,\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)\,\hat{e}_j$$

Divergencia de un vector:

$$\operatorname{div} \vec{v} \;=\; \frac{1}{\sqrt{\det g}}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{\det g}\; v_i \right)$$

Rotacional de un vector:

$$\operatorname{rot} \vec{v} \;=\; \frac{1}{\sqrt{\det g}}\,\epsilon_{ijk}\,\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\,\hat{e}_i$$

Laplaciano de un escalar:

$$\triangle\, f \;=\; \operatorname{div}\operatorname{grad} f \;=\; \frac{1}{\sqrt{\det g}}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{\det g}\; g_{ij}\,\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

Laplaciano de un vector:

$$\triangle \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x_i} \, g_{ij} \, \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \, \hat{e}_k$$

5. Diagonalización de un tensor

Ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Invariantes del tensor:

$$I_1 = \mathrm{Traza} T = T_{11} + T_{22} + T_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3$$

$$I_3 = \det T = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}$$

Norma y módulo del tensor:

$$N = T_{ij}T_{ij} \qquad M = \sqrt{N} = \sqrt{T_{ij}T_{ij}}$$

6. Tipos de tensores

1. Tensor Ortogonal

Diremos que R es ortogonal si:

$$R_{ij}R_{kj} = \delta_{ik} \qquad \text{ó} \qquad RR^t = \delta$$

$$R_{ij}R_{ik} = \delta_{jk} \qquad \text{ó} \qquad R^tR = \delta$$

Propiedades:

- El tensor inverso es el transpuesto: $R^t \; = \; R^{-1}$
- Existe una única dirección principal
- El determinantes es ± 1: $\det T \; = \; \pm 1$
- El tensor de cambio de base es ortogonal

2. Tensor Simétrico

Diremos que S es simétrico si:

$$S_{ij} \; = \; S_{ji} \qquad \text{ó} \qquad S \; = \; S^t$$

Propiedades:

- Los tres autovalores son reales: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Re$
- Si S es definido positivo ($\vec{v}^t S \vec{v} \geq \forall \vec{v}$), los autovalores son positivos.
- Los autovectores de S son mutuamente ortogonales

3. Tensor Hemisimétrico

Diremos que H es hemisimétrico si:

$$H_{ij} \; = \; -H_{ji} \qquad \text{ó} \qquad H \; = \; -H^t$$

Propiedades:

- Existe una única dirección principal con $\lambda = 0$
- El determinante de H es nulo

4. Descomposición de un tensor

Cualquier tensor puede expresarse como suma de uno simétrico y otro hemisimétrico

$$T \; = \; S + H \qquad \begin{cases} S_{ij} = (T_{ij} + T_{ji})/2 \\ H_{ij} = (T_{ij} - T_{ji})/2 \end{cases}$$

7. Efectos geométricos de tensores

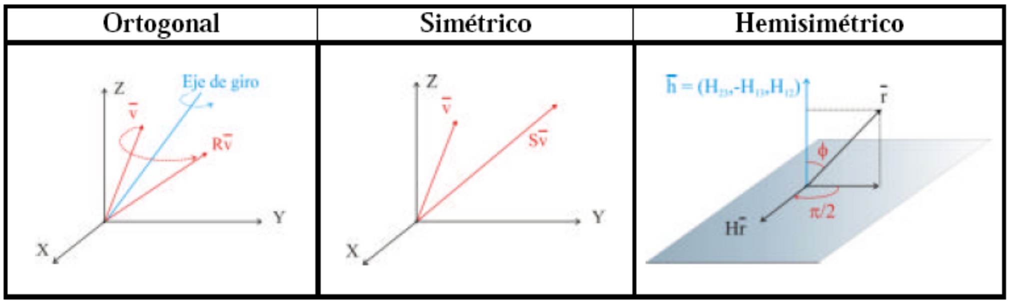

Figure 2: Efectos geométricos de tensores

Transformación	**Tipo de Tensor**
Giro simple	Ortogonal
Dilatación pura	Simétrico esférico
Deformación pura	Simétrico con $I_3 = 1$
Proyección sobre un plano	Hemisimétrico

Coeficiente de dilatación unitaria:

$$\xi \;=\; \frac{|\vec{u} - \vec{v}|}{|\vec{v}|} \qquad \text{Para un autovector} \quad \xi \;=\; \lambda - 1$$

Coeficiente de dilatación cúbica:

$$e \;=\; \frac{V' - V}{V} \;=\; I_3 - 1$$