formulario 1: Tensores

1. DIMENSIÓN, ORDEN Y COMPONENTES DE LOS DISTINTOS TENSORES

Dimensión n	**Orden m**	**Componentes** $N = n^m$	**Nombre**
2	0	1	Escalar
	1	2	Vector bidimensional
	2	4	Tensor bidimensional de segundo orden
	3	8	Tensor bidimensional de tercer orden
	4	16	Tensor bidimensional de cuarto orden
	…	…	…
3	0	1	Escalar
	1	3	Vector
	2	9	Tensor de segundo orden
	3	27	Tensor de tercer orden
	4	81	Tensor de cuarto orden
	…	…	…
4	0	1	Escalar
	1	4	Cuadrivector
	2	16	Cuadritensor de segundo orden
	3	64	Cuadritensor de tercer orden
	4	256	Cuadritensor de cuarto orden
	…	…	…

2. LEYES DE TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS

2.1. Matriz de cambio de coordenadas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \textit{donde} \qquad a_{ij} = \hat{e}_i^{'} \cdot \hat{e}_j = \cos(\hat{e}_i^{'} \hat{e}_j)$$

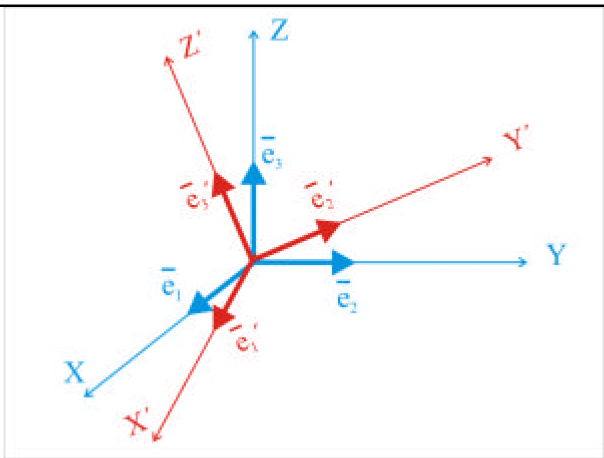


Figura 1. Cambio de coordenadas

2.2. Ley de Transformación Lineal y Homogénea para tensores de cualquier orden

$$T'_{ijk...} = a_{ir} a_{js} a_{kt} ... T_{rst...}$$

2.3. Leyes de Transformación

Orden m	Componentes	Ley de Transformación		Denominación
		Directa	Inversa	
0	$3^0 = 1$	$a' = a$	$a = a'$	Escalar
1	$3^1 = 3$	$v'_i = a_{ij} v_j$ $v' = Av$	$v_i = a_{ji} v_j'$ $v = A^t v'$	Vector
2	$3^2 = 9$	$T'_{ij} = a_{ir} a_{js} T_{rst}$ $T' = ATA^t$	$T_{ij} = a_{ri} a_{sj} T_{rs}'$ $T = A^t T' A$	Tensor segundo orden
3	$3^3 = 27$	$T'_{ijk} = a_{ir} a_{js} a_{kt} T_{rst}$	$T_{ijk} = a_{ri} a_{sj} a_{tk} T_{rst}'$	Tensor tercer orden
4	$3^4 = 81$	$T'_{ijkl} = a_{ir} a_{js} a_{kt} a_{lu} T_{rstu}$	$T_{ijkl} = a_{ri} a_{sj} a_{tk} a_{ul} T_{rstu}'$	Tensor cuarto orden
…	…	…	…	…

3. TENSORES DE INTERÉS

1. Tensor de Krönecker (d)

Definición

$$d_{ij} \equiv \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j^{\,t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow d_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Propiedad

$i)\ a_{ik} \cdot a_{jk} = d_{ij}$

$ii)\ a_{ki} \cdot a_{kj} = d_{ij}$

2. Tensor de Ricci (z)

$$z_{ij} \equiv \left|\hat{e}_i \wedge \hat{e}_j\right| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow z_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ 1 & i \neq j \quad \textit{permutación par} \\ -1 & i \neq j \quad \textit{permutación impar} \end{cases}$$

3. Tensor de Ricci-Curbastro (e)

$$e_{ijk} \equiv \hat{e}_i \cdot (\hat{e}_j \wedge \hat{e}_k) = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-1) \quad \Rightarrow e_{ijk} = \begin{cases} 0 & i=j \text{ ó } j=k \text{ ó } k=i \\ 1 & i \neq j \neq k \quad \text{permutación par} \\ -1 & i \neq j \neq k \quad \text{permutación impar} \end{cases}$$

4. DIAGONALIZACIÓN DE UN TENSOR

4.1. Ecuación característica

$$\begin{vmatrix} T_{11}-l & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-l & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-l \end{vmatrix} = 0$$

4. 2. Invariantes del tensor

$$I_1 = traza\{T\} = T_{11} + T_{22} + T_{33} = l_1 + l_2 + l_3$$

$$I_2 = suma\ de\ los\ menores\ principales = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{21} & T_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{21} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = l_1 l_2 + l_2 l_3 + l_3 l_1$$

$$I_3 = \det\{T\} = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = l_1 l_2 l_3$$

4.3. Norma y Módulo

$$N = T_{ij} T_{ij}$$

$$M = \sqrt{N} = \sqrt{T_{ij} T_{ij}}$$

5. TENSOR ORTOGONAL

5.1. Definición

$$R \quad ortogonal \quad \Leftrightarrow \begin{cases} R_{ij}R_{kj} = d_{ik} & ó \quad RR^t = d \\ & ó \\ R_{ij}R_{ik} = d_{jk} & ó \quad R^tR = d \end{cases}$$

5.2. Propiedades

Si R es ortogonal, entonces:

i) $R^t = R^{-1}$
ii) Existe una única dirección principal
iii) $\det\{R\} = \pm 1$
iv) $e = 0$
v) $A = (a_{ij})$ es ortogonal

6. TENSOR SIMÉTRICO

6.1. Definición

$$S \quad simétrico \quad \Leftrightarrow S_{ij} = S_{ji} \quad ó \quad S = S^t$$

6.2. Propiedades

Si S es simétrico de componentes reales, entonces:

i) $l_1, l_2, l_3 \in \Re$
ii) S es definida positiva ($v^tSv \geq 0 \quad \forall\, v$) $\Rightarrow \quad l_i \in \Re^+ \quad \forall i$
iii) $\vec{u}\ y\ \vec{v}\ autovalores\ de\ S \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

7. TENSOR HEMISIMÉTRICO

7.1. Definición

$$H \quad hemisimétrico \quad \Leftrightarrow H_{ij} = -H_{ji} \quad ó \quad H = H^t$$

7.2. Propiedades

Si H es hemisimétrico, entonces:

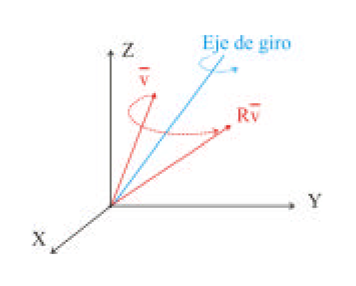
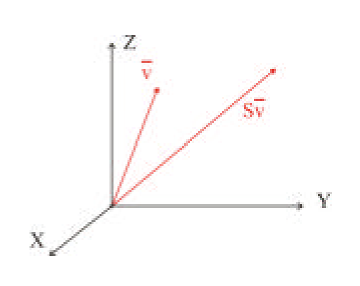
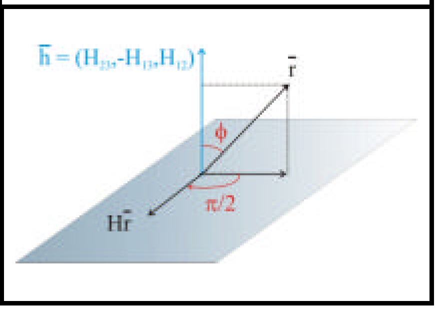
i) Existe una única dirección principal con $l = 0$
ii) $\det\{H\} = 0$
iii) $e = -1$

8. DESCOMPOSICIÓN DE UN TENSOR

$$T = S + H \quad \begin{cases} S_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right) \\ \\ H_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right) \end{cases}$$

9. EFECTOS GEOMÉTRICOS DE UN TENSOR

Transformación		**Tipo de tensor**
Giro simple		Ortogonal
Deformación	Dilatación pura	Simétrico esférico
	Deformación pura	Simétrico $I_3 = 1$
Reducción de volumen		Hemisimétrico

Ortogonal	**Simétrico**	**Hemisimétrico**
		

9.1. Coeficiente de dilatación unitaria (x)

$$x \equiv \frac{\vec{u} - \vec{v}}{\vec{v}} = l - 1$$

9.2. Coeficiente de dilatación cúbica (e)

$$e \equiv \frac{V' - V}{V} = I_3 - 1$$