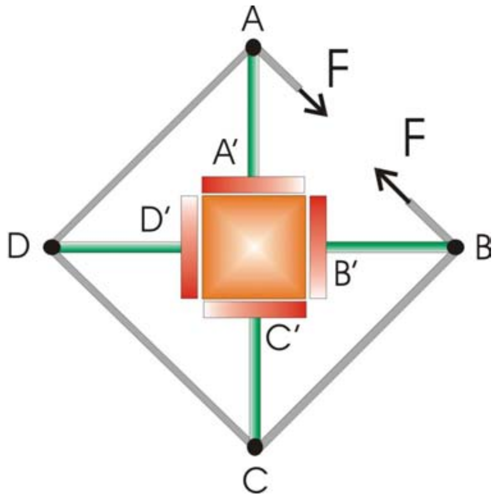
ELASTICIDAD

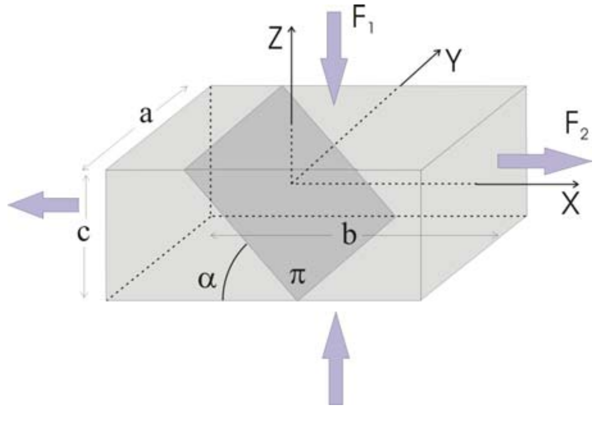
1. Una barra de sección rectangular con anchura 100 mm, fondo 50 mm y longitud 2 m se somete a una tracción de 50 Tm; la barra sufre un alargamiento de 1 mm y una contracción lateral en el fondo *b* de -0.007 mm. Calcule: a) el módulo de Young; b) el coeficiente de Poisson; c) la variación de la dimensión 100 mm de la sección recta; d) las dimensiones de la sección recta de la barra si se la somete a una tracción de 40 Tm.

2. Una placa rectangular de 50 por 25 cm, de espesor constante, se le somete a un sistema exterior de fuerzas presentando un estado tensional tal que las tensiones principales tienen en todos sus puntos los valores $\sigma_I = 7$ kp/mm^2, $\sigma_{II} = 3$ kp/mm^2 y $\sigma_{III} = 0$ kp/mm^2. Las direcciones principales son respectivamente las de los lados de la placa y perpendicular a la misma. Si el módulo de Young vale $E = 2.10^6$ kp/cm^2 y el coeficiente de Poisson es $\nu = 0.3$, calcule: a) la variación de área de la placa y b) la deformación unitaria del espesor.

3. Un bloque cúbico de hormigón de lado 15 cm se comprime mediante un mecanismo de barras articuladas, tal y como se indica en la figura, al actuar con F equivalente a 12 Tm. En los extremos A', B', C' y D' de las barras se colocan unas placas perfectamente rígidas con objeto de que la compresión sobre las caras del hormigón sea uniforme. Sabiendo que el módulo de Young del hormigón es $E = 2.8\ 10^5$ kp/cm^2 y el coeficiente de Poisson es $\nu = 0.1$, calcule la variación de volumen experimentada por el bloque.



4. Sobre el prisma de la figura actúan fuerzas F_1 de 10 Tm y F_2 de 2 Tm uniformemente repartidas sobre las caras indicadas. Las longitudes de las aristas son a = 4 cm, b = 10/3 cm y c = 2 cm. Sabiendo que el prisma es de acero ($E = 2.1\ 10^6$ kp/cm^2 y $\nu = 0.25$) calcule: a) las componentes intrínsecas del vector tensión en le plano π (α = 60º); b) las deformaciones principales y c) la deformación transversal unitaria máxima.

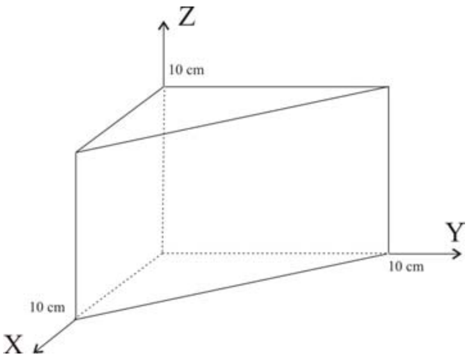


5. Sobre el sólido pentaédrico (*E* = *2* 10^6 *kp/cm*^{2} y ν = *0.25*) de la figura se ha provocado un estado tensional mediante la aplicación de las fuerzas de volumen:

$$f_x = 0 \quad f_y = 6\ kp/cm^3 \quad f_z = 17\ kp/cm^3$$

y fuerzas de superficie. La solución de tensiones es del tipo:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= ay + bz & \tau_{xy} &= 0 \\ \sigma_y &= 3ay + bz & \tau_{xz} &= 0 \\ \sigma_z &= ay + 3bz & \tau_{yz} &= 2ay - 2bz \end{aligned}$$



en *kp/cm*^{2} para las tensiones y en *cm* para las coordenadas espaciales. Se pide: a) los valores de los coeficientes *a* y *b*; b) tensiones y direcciones principales en el punto *P* de coordenadas (3, 3, 4) *cm*; c) expresiones de las fuerzas superficiales en las caras del sólido; d) matriz de deformación.

6. Una barra cilíndrica está fabricada de un material isótropo linealmente elástico y es sometida a cargas axiales que provocan un esfuerzo normal σ_x = 420 MPa y las otras componentes son nulas. Al medir los cambios en el diámetro y longitud de la barra se determina que la deformación axial ε_x = 0.006 y las deformaciones transversales son ε_y = ε_z = - 0.002. Calcule: a) el módulo de Young; b) el coeficiente de Poisson; c) el módulo de elasticidad transversal; d) las constantes de Lamé; e) el módulo de deformación volumétrica.

7. En los puntos de un cubo cuya arista es 10 cm (*E* = *2* 10^6 *kp/cm*^{2} y ν = *0.25*) el estado de deformación referido a un sistema cartesiano con origen en uno de sus vértices está definido por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= 8ax & \varepsilon_{xy} &= 0 \\ \varepsilon_y &= 0 & \varepsilon_{xz} &= 0 \\ \varepsilon_z &= 0 & \varepsilon_{yz} &= 2a(4z - y) \end{aligned}$$

donde $a = 10^{-6}\ cm^{-1}$. Se pide: a) comprobar que el estado de deformación así definido es físicamente posible; b) calcular el sistema de fuerzas (superficiales y de volumen) que actúan sobre el cuerpo originando esa deformación.

8. Para los puntos de un sólido elástico cilíndrico de radio R, altura h y generatrices paralelas al eje Z, las componentes del vector desplazamiento son:

$$u_x = a(x^2 - 5y^2)$$
$$u_y = 2axy$$
$$u_z = 0$$

siendo a una constante. Sabiendo que las fuerzas por unidad de volumen son despreciables, calcule: a) el tensor de deformación; b) las deformaciones principales; c) conocido el módulo de elasticidad transversal μ, ¿qué valor toma el módulo de Young para que haya equilibrio en todo punto?; d) ¿qué fuerzas superficiales tienen que actuar en las superficies que definen al cilindro para provocar los desplazamientos anteriores?

9. Determinar las tensiones que corresponden al vector Galerkin:

$$\vec{P} = 2x^4\hat{i} + y^4\hat{j} + (-8x^3z - 4y^3z)\hat{k}$$

así como las fuerzas de volumen que deben existir para dichas tensiones.

10. Resolver el problema elástico que se presenta en una barra cilíndrica recta limitada por dos secciones normales a sus generatrices, sometida a tracción o compresión axial, mediante la determinación de un potencial. Se consideran despreciables las fuerzas de masa.

11. Dado el estado tensional definido por:

$$\sigma_x = ax^2 \qquad \tau_{xy} = bxy$$
$$\sigma_y = ay^2 \qquad \tau_{xz} = bxz$$
$$\sigma_z = az^2 \qquad \tau_{yz} = byz$$

y de fuerzas de volumen:

$$f_x = cx \quad f_y = cy \quad f_z = cz$$

determine las relaciones que deben de cumplir las constantes a, b y c para que ese estado de tensiones sea una posible solución de un problema elástico.

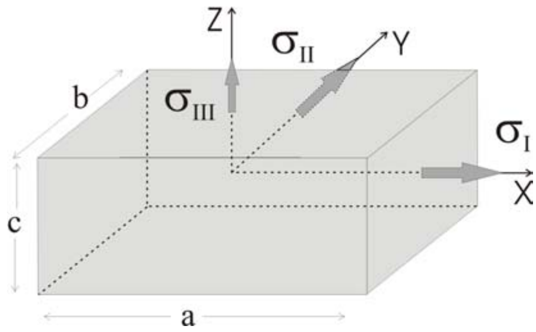
12. Las tensiones principales en un punto P de un material con comportamiento elástico ($E = 2\ 10^6\ N/cm^2$ y $\nu = 0.2$) son:

$$\vec{\sigma}_I = 8\hat{i} - 8\hat{j} + 4\hat{k}$$
$$\vec{\sigma}_{II} = -4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$$
$$\vec{\sigma}_{III} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

Obtener el tensor de deformaciones en el punto P y las constantes de Lamé.

13. Se tiene una pieza de material elástico ($E = 2\ 10^7\ N/cm^2$ y $\nu = 0.3$) en forma de prisma recto de base rectangular cuyas dimensiones son a =10 cm, b = 5 cm y c = 0.2 cm. El material se somete a una solicitación tal que provoca tensiones principales en todos sus puntos iguales a:

$$\sigma_I = 100 N/cm^2$$
$$\sigma_{II} = 50 N/cm^2$$
$$\sigma_{III} = 0 N/cm^2$$

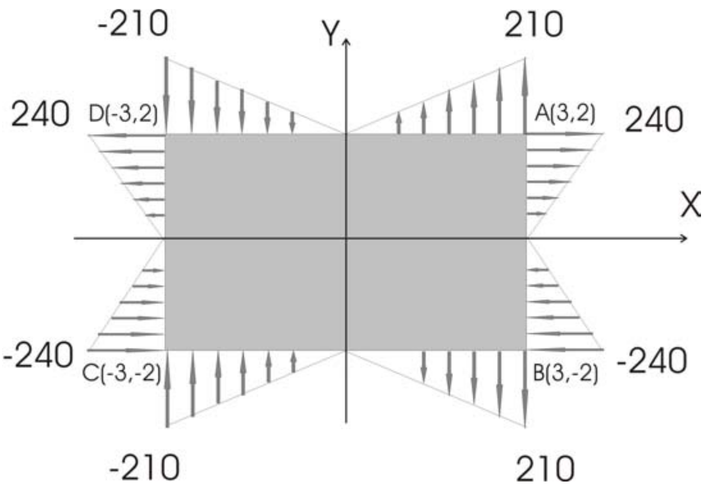


según se muestra en la figura. Calcule: a) en cuanto se modifica el área de la pieza; b) la variación de volumen; c) los tensores de deformación volumétrico, desviador y el total.

14. Se tiene un recipiente cilíndrico de diámetro interior *2 m* y cuya pared es una lámina de *5 cm* de espesor constituida por un material elástico ($E = 22\ 10^6\ N/cm^2$ y $\nu = 0.3$). El recipiente se llena de gas estableciéndose la presión interior en $300\ N/cm^2$. La deformación de las tapas del cilindro se considera despreciable. Calcule la tensión desarrollada en el material de la pared lateral del cilindro: a) en la dirección axial; b) en una dirección contenida en la sección transversal, según la tangente a la circunferencia media; c) las deformaciones correspondientes a las tensiones anteriores.

15. Utilizando una función de Airy apropiada, calcular las tensiones σ_x, σ_y y τ_{xy} en la flexión de una viga de sección rectangular de ancho b y altura h, en voladizo, con una carga *P* en su extremo libre.

16. Considere una placa rectangular de 6 x 4 m cuyo espesor es muy pequeño, su peso despreciable y construida con un material elástico. La placa se ve afectada de una distribución de tensiones (en kp/cm^2) como la de la figura. Calcule: a) las ecuaciones analíticas de la distribución de tensiones sobre el contorno de la placa; b) la función de Airy; c) el tensor de tensiones en un punto cualquiera de la placa.



17. Se tiene una placa de peso despreciable y dimensiones 80 x 40 cm. Las componentes del tensor de tensiones en los vértices A, B, C y D de la placa están recogidos en la siguiente tabla (longitudes en decímetros y tensiones en kp/cm^2).

	A(4,2)	B(-4,2)	C(-4,-2)	D(4, -2)
σ_x	38	6	-18	14
σ_y	0	0	0	0
τ_{xy}	-12	-12	4	4

Sabiendo que las tensiones normales y tangenciales varían linealmente a lo largo de la arista de la placa, se pide: a) un croquis con las distribuciones de tensiones normales y tangenciales en los bordes de la placa; b) discernir si existe una función de Airy polinómica; c) hallar la solución en tensiones en cualquier punto de la placa.

18. El estado de esfuerzo en un punto de un material que tiene un módulo de Young E = 28 GPa y una relación de Poisson ν = 0.3 es:

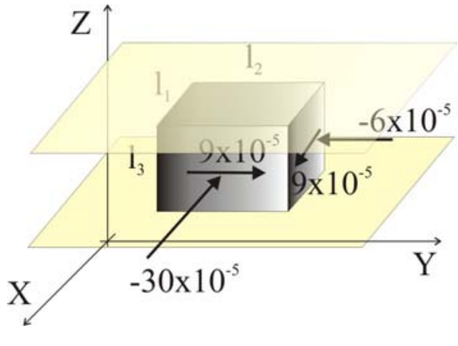
$$\sigma = \begin{pmatrix} 250 & -20 & 0 \\ -20 & 250 & 40 \\ 0 & 40 & 200 \end{pmatrix} \quad MPa$$

a) ¿Cuál es el estado de deformación del mismo punto?; b) ¿Cuánto valen las constantes de Lamé para este material?; c) determine el valor del módulo volumétrico.

19. Comprobar que la función de tensión de Airy cuando la fuerza másica aplicada es el peso del cuerpo satisface la ecuación de equilibrio y la ecuación de compatibilidad.

20. Una pieza cúbica metálica utilizada en tareas de extracción de petróleo en una plataforma tiene una arista de 20 cm y debe sumergirse en el mar hasta una profundidad de 400 m (densidad del agua del mar, ρ = 1.06 g/cm^3). Conociendo que tiene un módulo de Young E = 2.1 10^6 kp/cm^2 y una relación de Poisson ν = 0.3, calcule la variación de volumen que experimenta el cubo sumergido.

21. Se tiene un prisma recto de base rectangular y dimensiones $l_1 = 2$ *cm*, $l_2 = 3$ *cm* y $l_3 = 5$ *cm* construido de un material elástico ($E = 5\ x10^5$ N/cm^2 *y* $\nu = 0.25$); este prisma se encuentra impedido a la variación en longitud de su dimensión *z* mediante dos planchas planas y rígidas que mantienen fija su distancia. Los valores de las deformaciones pueden verse en la figura. Obtenga: a) el tensor de tensiones y el de deformaciones; b) la variación de volumen del prisma.

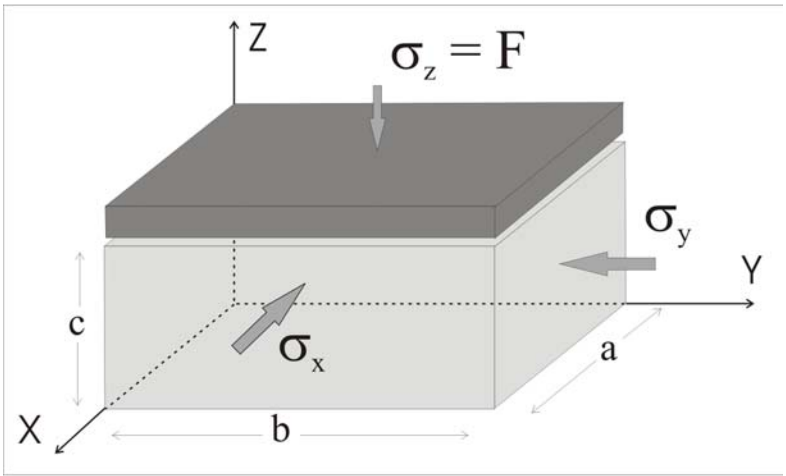


22. El estado tensional de una placa poligonal de vértices A (2, 0), B(0, 4), C (-2, 0) y D (0, -2) (expresadas las coordenadas en metros) está definido por la función de Airy:

$$\phi = 3x^3 - xy^2 - 3y^3 + x^2$$

Sabiendo que las tensiones que de ella se derivan vienen dadas en kp/cm^2 cuando las coordenadas se dan en metros, se pide: a) comprobar que ϕ es función de Airy; b) obtener los valores de las tensiones normales σ_x, σ_y y transversales τ_{xy} en cada vértice de la placa; c) representar las distribuciones de tensiones normales y tangenciales que actúan en cada lado de la placa.

23. Un bloque de material con comportamiento elástico tiene forma de paralelepípedo recto de dimensiones *a = 4 cm*, *b = 4 cm* y *c = 5 cm*; el bloque se aloja en una cavidad de la misma forma y dimensiones cuyas paredes son de un material lo suficientemente rígido para poderlo suponer indeformable. Sobre la abertura de la cavidad, de dimensiones *a x b* , y a través de una placa rígida, se aplica una fuerza compresiva de 320 N. El módulo de Young del material vale 2.10^6 N/cm^2 y el coeficiente de Poisson es igual a 0.2. Calcular: a) Las fuerzas ejercidas sobre el paralelepípedo por las paredes de la cavidad; b) el tensor de tensiones diagonalizado; c) la variación de altura experimentada por el bloque; d) el coeficiente de variación cúbica y la variación de volumen experimentada por el bloque; e) las constantes de Lamé y el tensor de tensiones a partir de las ecuaciones de Lamé.



24. El potencial de deformación de Lamé en un punto de un material elástico viene dado por:

$$\psi = a(x^2 - y^2) + 2bxy$$

donde a y b son constantes. Determine: a) los desplazamientos que sufre el material; b) las deformaciones; c) las tensiones.

25. Un soporte elastomérico (G = 0.9MPa) se emplea para apoyar una viga de un puente, como se muestra en la figura, para suministrar flexibilidad durante terremotos. La viga no debe desplazarse más de 10 mm cuando la carga lateral de 22 kN sea aplicada como muestra la imagen. Sabiendo que el máximo esfuerzo cortante permisible es 420 kPa, determine a) la dimensión *b* mínima permisible y b) el mínimo grosor requerido *a*.