CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

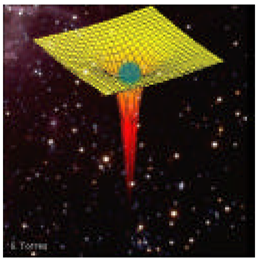
1) Sea el campo escalar $E(x,y,z)=x^3+2xy^2+y^3+z^2(x+y)$. Encontrar $\nabla E(1,1,1)$.

2) Dado el vector de posición $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ y el vector constante $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ $\quad (a_i=cte,\ i=1,2,3)$ calcular: a) ∇r^2; b) $\nabla(\vec{a}\vec{r})$.

3) Demostrar que el campo vectorial :

$$\vec{v}(x,y,z)=(3x^2y+zy^2)\hat{i}+(x^3+2xyz)\hat{j}+y^2x\hat{k}$$

es irrotacional y encontrar el potencial del cual deriva.



4) Sea $\vec{v}=r^2\vec{r}$ donde $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$. Demuestre que $\nabla\vec{v}=5r^2$.

5) La función potencial de un campo vectorial viene dada por $E(x,y,z)=z^2x-2y-\dfrac{1}{3}x^3+5$. a) Calcular el campo vectorial. b) Comprobar que es irrotacional.

6) Demostrar que el campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)=6xy\hat{i}+(3x^2-3y^2)\hat{j}+z\hat{k}$ es irrotacional.

7) Dado el vector $\vec{a}=x^2y\hat{i}+(xz-y^2)\hat{j}+3xz^2\hat{k}$, calcule $d\vec{a}$.

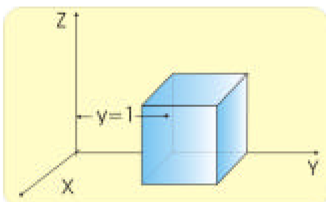
8) Calcular la derivada direccional de $f=2xz-y^2$ en la dirección del vector $\vec{l}=(2,1,-1)$ y en el punto P(1,3,2). Determinar en dicho punto la dirección de máximo crecimiento de f.

9) Calcular el momento respecto al origen de coordenadas del gradiente de la divergencia del vector $\vec{v}=x^2\hat{i}-2yz\hat{j}+xyz\hat{k}$ en el punto M(1,1,1).

10) Hallar la circulación del vector $\vec{a}=2y\hat{i}+3x^2\hat{j}+3xz\hat{k}$ entre los puntos (1,1,1) y (2,4,1) a lo largo de la curva $y=x^2; z=1$.

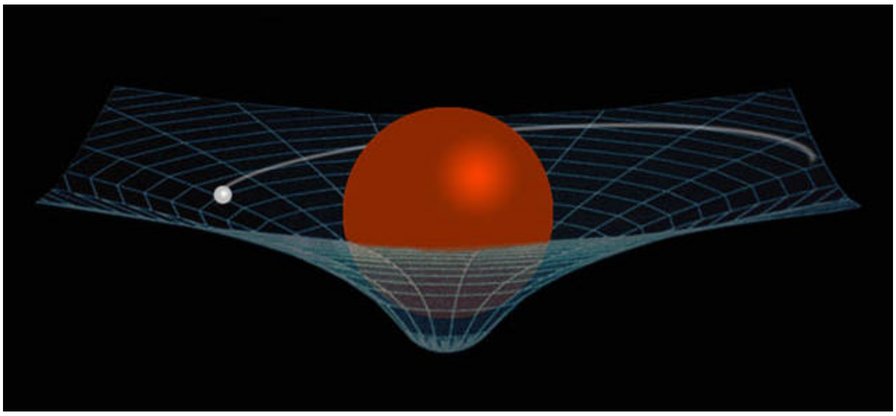
11) Dado el campo escalar $E=x^3+2y^2+z$ hallar el momento de su gradiente en el punto (1,1,1) respecto al origen de coordenadas.

12) Calcular el flujo total que atraviesa la superficie de un cubo de arista la unidad situado como indica la figura en el campo $\vec{v}=2y\hat{j}$.



13) Obtener el valor máximo de la derivada de la función $E(x,y,z)=x^2yz^2$ en el punto (1,1,2) y calcular la dirección en que tiene lugar esta variación.

14) Determine el campo del que deriva el siguiente potencial: $V=3e^{2x}-2\cos y+x^2$.

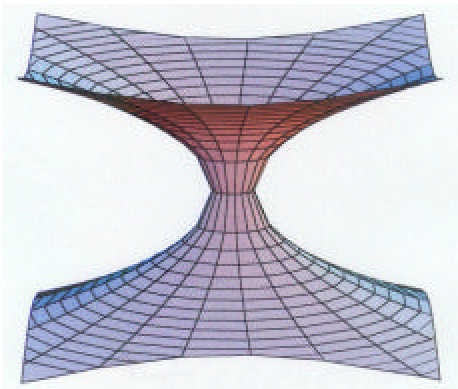


15) ¿Es conservativo el campo de fuerzas dado por $\vec{F}=2xy^2z\hat{i}+(2x-y^2)\hat{j}+(xz-y^2)\hat{k}$?

16) Si $\vec{r}$ es el vector de posición del punto (x,y,z), demuestre que: a) $\nabla\vec{r}=3$; b) $\nabla\wedge\vec{r}=0$; c) $(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{r}=\vec{u}$ siendo $\vec{u}$ un vector cualquiera.

17) Sabiendo que $\vec{A}=3x^2y\hat{i}-4x^3z\hat{j}+8xy^2z\hat{k}$ y $V=3xy^2-6x^3z^2$, obtenga los valores, en el punto (2,1,1), de: a) $\vec{A}\cdot\nabla V$; b) $\vec{A}\wedge\nabla V$

18) Sea $y=x^2+y^3-z+3t^2+2tx-t+5$; determine $\dfrac{\partial(\nabla y)}{\partial t}$.



19) Sea $\vec{A}=(x+y)\hat{i}+xy\hat{j}$; calcule la circulación de este vector por los siguientes caminos: a) $y=x$ desde (0,0) hasta (1,1); b) la línea determinada por (0,0), (1,0) y (1,1); c) $y=x^2$ desde (0,0) hasta (1,1); d) sobre la trayectoria cerrada definida por las curvas $y=x^2$ y $x=y^2$.

20) Calcular la circulación del vector $\hat{A} = (2x - y + z)\hat{i} + (x + y - z)\hat{j} + xyz\hat{k}$ en el contorno de la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

21) Calcular el flujo del campo vectorial definido por $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ a través de las superficies siguientes: a) la superficie de un cubo de arista la unidad delimitado por los planos coordenados y los planos $x = 1,\ y = 1,\ z = 1$; la superficie esférica de radio la unidad y centrada en el origen de coordenadas.

22) Determinar directamente la circulación del vector $\hat{A} = (2x - y)\hat{i} - yz^2\hat{j} - y^2 z\hat{k}$ sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$ en el plano XY. Repetir el ejercicio utilizando el teorema de Stokes.

23) Demuestre que existe un valor constante α tal que la integral curvilínea:

$$\int \left(\frac{1 + a y^2}{(1 + xy)^2} dx + \frac{1 + a x^2}{(1 + xy)^2} dy \right)$$

tomada entre dos puntos fijos es independiente del camino de integración.