TENSORES

1. Escribir en notación indicial las siguientes expresiones: a) el producto escalar de dos vectores; b) el módulo de un vector; c) la diferencial de una función de *n* variables.

2. Notando a los versores $\hat{\imath}, \hat{\jmath}\ y\ \hat{k}$ como $\hat{x}^i$ exprese indicialmente el gradiente de un escalar y la divergencia de un vector.

3. Demuestre las siguientes afirmaciones: a) $\delta_{ij} \cdot \delta_{ij} = 3$; b) $\varepsilon_{ijk} \cdot \varepsilon_{ijk} = 6$; c) $\delta_{ij} \cdot v_j = v_i$; d) el determinante de una matriz 3 x 3 viene dado por $|A| = \varepsilon_{ijk}\, a_{i1}\, a_{j2}\, a_{k3}$; e) las tres componentes del producto vectorial de dos vectores $\vec{v}\ y\ \vec{w}$ vienen dadas por $(\vec{v} \wedge \vec{w})_i = \varepsilon_{ijk}\ v_j\ w_k$; f) $\varepsilon_{ijk} \cdot \varepsilon_{ist} = \delta_{js} \cdot \delta_{kt} - \delta_{jt} \cdot \delta_{ks}$.

4. Dados el vector $\vec{v}$ y el tensor T:

$$\vec{v} = \left(1,\, 0,\, -\tfrac{1}{2}\right) \qquad T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

expresados en el sistema S, calcule sus componentes en S' sabiendo que los ejes de este último están girados 30 º en torno al eje X_1 y en sentido antihorario.

5. Demuestre que la contracción de un tensor de orden 3 produce un tensor de orden 1, es decir, un vector.

6. Demuestre que el producto de un tensor simétrico por otro antisimétrico es nulo.

7. Sean los vectores $\vec{v} = (1, 0, 2)\ y\ \vec{u} = (-2, 1, 1)$. Realice: a) su producto tensorial; b) su producto contraído.

8. Descomponga el tensor T:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

en uno S simétrico y otro H antisimétrico

9. Dado el tensor:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

encuentre: a) el traspuesto; b) el adjunto; c) el inverso; d) compruebe que $T^{-1}T=\delta$.

10. Dado el tensor:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

obtenga los versores propios y los invariantes del mismo.

11. Diagonalice el tensor siguiente:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 5/2 \end{pmatrix}$$

12. Dado el tensor:

$$S = \begin{pmatrix} 7/4 & \sqrt{3}/4 & 0 \\ \sqrt{3}/4 & 5/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

determine sus valores y vectores propios. Encuentre la matriz de transformación A que aplicada a S lo transforma en su forma diagonal.

13. Sea un elipsoide de semiejes a, b y c. ¿En qué se transforma bajo la aplicación del tensor T dado por:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ?$$

14. Dado el tensor:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

descompóngase en suma de un tensor simétrico y otro hemisimétrico.

15. Demuestre que el gradiente de un vector:

$$(\nabla \vec{v})_{ij} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

es un tensor de segundo orden.

16. a) Encuentre las matrices de giro que provocan una rotación de φ radianes alrededor del eje de las X, del eje de las Y y del eje de las Z. b) Demuestre que son ortogonales. c) Dado el tensor T:

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en el sistema XYZ, encuentre su expresión en el sistema X'Y'Z' obtenido después de girar 60º alrededor del eje X.

17. Hallar los valores y vectores propios de los tensores S, T y U que se dan a continuación así como sus expresiones en el sistema de ejes propios y las matrices de transformación que los convierten en diagonales:

$$S = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 7/4 & 0 & -\sqrt{3}/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3}/4 & 0 & 5/4 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

18. Dados los vectores:

$$\vec{a} = 3x\hat{\imath} - 4\hat{k} \qquad \vec{b} = 6x^2\hat{\imath} - 3y\hat{\jmath} + \hat{k}$$

determine: a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ y su contracción; b) $\nabla\vec{a}$, $\nabla\vec{b}$ y sus contracciones.

19. Halle los tensores que representan las proyecciones sobre los ejes coordenados de cualquier vector.

20. Aplique el tensor T dado por:

$$T = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

al vector $\vec{v} = a\hat{\imath} + a\hat{\jmath} + a\hat{k}$.