Práctica 5: Método de Newton–Raphson para ecuaciones no lineales

1. Introducción

Recordemos que el método de Newton–Raphson consiste en calcular las iteraciones

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

a partir de un valor inicial $x^{(0)}$. El algoritmo se puede interpretar como la iteración de punto fijo con la función

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}\,.$$

En esta práctica estudiaremos las regiones de convergencia del método de Newton para una función concreta, así como la influencia de las raíces múltiples en las propiedades de convergencia.

2. Trabajo de laboratorio

1. Escriba una función de MATLAB, llamada **minewton**, con el siguiente encabezamiento:

```
function [x,xvect,nit]=minewton(f,fprima,x0,maxiter,tolerancia)
% Implementa el algoritmo de Newton
% usando la funcion puntofijo.m
% f = expresion de la funcion cuyas raices se buscan
% fprima = su derivada
% x0 = valor inicial
% Como criterios de parada se usan:
% maxiter = cantidad max de iteraciones admitidas
% tolerancia = margen para error absoluto
% En la salida:
% x = resultado de la ultima iteracion
% xvect = vector de los resultados de todas las iteraciones
% nit = cantidad de iteraciones realizadas
```

Emplee la función **puntofijo** de la práctica anterior como modelo; en particular, utilice los mismos criterios de parada.

2. Pruebe la función creada calculando las dos raíces reales, $x = 1$ y $x = -5$, de $f(x) = 2x^2 + 8x - 10$.

3. Vamos a estudiar las regiones de convergencia del algoritmo de Newton para la función f del apartado anterior. Sean I_1 e I_{-5} los conjuntos de $\mathbb{R}$ tales que si $x^{(0)} \in I_1$ (respectivamente, si $x^{(0)} \in I_{-5}$) entonces el algoritmo converge a la raíz 1 (resp., a -5) en ≤ 200 iteraciones. Asumiendo que I_1 e I_{-5} son intervalos abiertos, estime experimentalmente los extremos de esos intervalos, tomado `tolerancia`$= 2\epsilon_M$(donde ϵ_M es el épsilon de la máquina).

4. Veamos la influencia de una raíz doble en la convergencia del método de Newton, aplicándolo ahora a la función

$$h(x) = (x - 1)f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 18x + 10\,,$$

con una raíz doble en $x = 1$ y otra simple en $x = -5$. Tomando como valores iniciales $x^{(0)} = 0$ y $x^{(0)} = -4$, estudie la cantidad de iteraciones que se necesitan para aproximar por medio de **minewton** las dos raíces con `tolerancia`$= 2\epsilon_M$ para las funciones f y h. ¿Dónde se observan las diferencias? Dibuje las gráficas de los errores cometidos en las iteraciones correspondientes en la misma escala semilogarítmica (**semilogy**) para apreciar la convergencia geométrica.

5. Aplique el algoritmo Δ^2 de Aitken para acelerar la convergencia de la sucesión de aproximaciones a la raíz $x = 1$ de h. Dibuje las gráficas de los errores cometidos en las sucesiones original y acelerada en la misma escala semilogarítmica, y compare la velocidad de convergencia en cada caso.

   Sugerencia: para implementar la fórmula de Aitken es conveniente utilizar la función **diff** de MATLAB. Utilice la ayuda para conocer la sintaxis y el objetivo de dicha función.

6. Vamos a modificar el método de Newton para tomar en cuenta la multiplicidad de la raíz, tal como se indica en el texto:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - m\,\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}\,,$$

donde m es la multiplicidad. Para ello:

   a) escriba la función **newtmod**, usando como modelo la función **minewton**, pero que acepte como parámetro adicional el valor de m.

b) estime el valor de m usando la aproximación descrita en el texto,

$$m \approx \frac{\ln[f(x^{(k-1)})/f(x^{(k-2)})]}{\ln[(x^{(k-1)} - x^{(k)})/(x^{(k-2)} - x^{(k)})]} \,.$$

Tome como m el valor entero más cercano.

c) aplique el algoritmo de Newton modificado con el m calculado y comente la convergencia.