CÁLCULO NUMÉRICO I.T.I.S. Examen de febrero de 2010

Apellidos: **Nombre:**

1. Se tiene el siguiente sistema lineal que depende del parámetro t:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x+y &=& t \\ x+ty-z &=& \dfrac{1}{t} \\ -y+2z &=& 4t^3 \end{array}\right\}$$

   a) **(0.5)** Razone una condición suficiente sobre el parámetro t para que el método de Gauss-Seidel converja.

   b) **(1)** Obtenga la matriz del método de Gauss-Seidel y calcule sus valores propios.

   c) **(0.5)** Obtenga el radio espectral de la matriz del método de Gauss-Seidel en función del parámetro t y razone para qué valores de t no será convergente dicho método.

2. Se necesita evaluar la función $f(x) = x^2 - x\sqrt{x^2+9}$ para valores grandes de x.

   a) **(0.25)** Encuentre el menor valor $x = 10^n$, con $n \in \mathbb{N}$, de modo que se produzca una cancelación en su calculadora al evaluar f en dicho valor, es decir que ocurra que $f(10^n) = 0$ en su calculadora.

   b) **(1)** Encuentre un modo de evaluar f que evite errores de cancelación.

   c) **(0.25)** Obtenga el valor de $f(10^n)$, evitando la cancelación, para el número n elegido.

3. Se sabe que la ecuación $\cos x = \arctan x$ tiene una única solución s estrictamente positiva.

   a) **(1)** Demuestre que dicha solución existe y es única en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

   b) **(0.75)** Partiendo del intervalo del apartado anterior, tome un subintervalo de amplitud 1 donde se encuentre la solución s y en dicho intervalo calcule el número de iteraciones del método de bisección para que se aproxime s con un error absoluto menor que 10^{-3}.

   c) **(0.5)** Obtenga la aproximación de s con la tercera iteración de dicho método en el intervalo que has tomado.

4. a) **(1.5)** Calcule el menor grado del polinomio de Taylor centrado en $c = 1$ que ha de utilizarse para aproximar el valor de $\ln 1{,}2$ con un error menor que 0,0002. **Nota:** El resultado es $n = 3$.

   b) **(0.75)** Con el polinomio de Taylor de grado 3 correspondiente calcule el valor aproximado de $\ln 1{,}2$ y compruebe que efectivamente el error cometido en la aproximación es menor que 0,0002.

5. **(2)** Determine el mínimo nº de puntos en los que debe evaluarse $f(x) = e^x\left(x^2 - 10x + 31\right)$ para que el método de Simpson proporcione una aproximación de la integral de f en $[-2, 2]$ con un error menor que 10^{-6}. **Nota:** La derivada cuarta es $f^{\mathrm{iv})}(x) = e^x\left(x^2 - 2x + 3\right)$. (Uno de los resultados siguientes es el correcto: $n = 45$ ó $n = 107$).

Puntuación de las preguntas: Se indica en cada apartado.
Tiempo: 2 horas y media.

Almería, 1 de febrero de 2010