Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería Agronómica

Soluciones de los ejercicios propuestos seleccionados*

Versión de 30 de marzo de 2011

Capítulo 1

Sección 1.1.3

3. $\operatorname{card}\mathcal{P}(A) = 2^n$.

Sección 1.2.7

1. $\sup A = \text{máx}\, A = 4$, $\text{ínf}\, A = \text{mín}\, A = -4$; $\sup B$, $\text{ínf}\, B$, $\text{máx}\, B$ y $\text{mín}\, B$ no existen ya que $B = (-\infty, 17] \cup [-1, \infty)$.

2. Sobre la recta real habrá que representar los conjuntos:

   $A = [-6, 6]$ y $B = [-6, -1) \cup (-1, 4]$.

3. $\operatorname{int} A = \emptyset$, $\operatorname{ext} A = \mathbb{R} - A - \{2\}$, $\operatorname{ais} A = A$, $A' = \{2\}$, $\overline{A} = \partial A = A \cup \{2\}$.

Sección 1.3.6

1. $\operatorname{int} A = \emptyset$, $\operatorname{ext} A = \mathbb{R} - A - \{1\}$, $\operatorname{ais} A = A$, $A' = \{1\}$, $\overline{A} = \partial A = A \cup \{1\}$.

   Corrigiendo la errata de que la unión se toma para $n \in \mathbb{N}$, el resultado es

   $\operatorname{int} B = [1, \infty) - \mathbb{N}] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (n, n+1)$, $\operatorname{ext} B = \mathbb{R}^- \cup \left[(0,1) - \left\{\dfrac{1}{1+n} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}\right]$,

   $\operatorname{ais} B = \left\{\dfrac{1}{1+n} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$, $B' = [1, \infty) \cup \{0\}$, $\partial B = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \left\{\dfrac{1}{1+n} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$,

   $\overline{B} = [1, \infty) \cup \{0\} \cup \left\{\dfrac{1}{1+n} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$.

3. (a.1) $A_1 = \{Q \in \mathbb{R}^2 \,:\, \|P - Q\| = a\} = C(P, a)$, circunferencia con centro en el punto P y radio a.

   (a.2) $A_2 = \{Q \in \mathbb{R}^2 \,:\, \|P - Q\| < a\} = B(P, a)$, círculo abierto (o bola abierta) de centro P y radio a.

   (b.1) $B_1 = \{Q \in \mathbb{R}^3 \,:\, \|P - Q\| = a\} = S(P, a)$, superficie esférica de centro P y radio a.

---

* Agradeceré que se me comunique cualquier errata o error que se detecte en las soluciones: pueden enviarse a la dirección de correo electrónico jarodrig@ual.es.

(b.2) $B_2 = \{Q \in \mathbb{R}^3 \,:\, \|P-Q\| > a\} = \mathbb{R}^3 - B[P,a]$, $\mathbb{R}^3$ menos la bola cerrada de centro P y radio a.

4. (a) $\arccos \dfrac{33}{5\sqrt{58}} \simeq 0{,}5224$ rad. (b) $\pi/2$ rad.

5. $v = \left(\dfrac{1-\lambda}{2}, \dfrac{3\lambda-1}{2}, \lambda\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

6. (a) Es incorrecta: es necesario especificar qué producto se hace en primer lugar.

   (b) Es correcta y se obtiene un vector de $\mathbb{R}^3$.

   (c) Es correcta y se obtiene un escalar.

   (d) Es falsa, pues no pueden multiplicarse vectorialmente un escalar y un vector.

7. (a) Solo tendría sentido si el primer punto indica la operación producto por escalares y el segundo el producto escalar. En tal caso se obtiene un vector de $\mathbb{R}^n$.

   (b) No tiene sentido sumar escalares con vectores.

   (c) La norma de un escalar es su valor absoluto, pero no suele emplearse la notación de norma en ese caso.

   (d) Tiene sentido y es un vector de $\mathbb{R}^n$.

   (e) Tiene sentido cuando el primer y tercer punto es el producto escalar, y el segundo es un producto por escalares. Se obtiene como resultado un escalar.

8. Paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 2+t, \\ y = -1+3t \end{array}\right\}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Continua: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{3}$.

   Normal: $(x-2, y+1)\cdot(-3,1) = -3(x-2)+y+1 = 0$.

9. Paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 1+2\alpha-\beta, \\ y = 2\alpha, \\ z = 1+\alpha+\beta \end{array}\right\}$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   Segmentaria: $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-4/3} + \dfrac{z}{2} = 1$.

Sección 1.4.4

1. (a) $13i$. (b) $-i$.

2. $e^{z+w} = e^2(\cos 3/2 + i \,\mathrm{sen}\, 3/2)$, $e^{zw} = e(\cos 1 - i\,\mathrm{sen}\, 1)$.

Sección 1.5

1. $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \,:\, -1 \le x < 3\} = [-1,3)$,

   $A \cap C = C = \{-1,0,1\}$,

   $B \cap C = \{1\}$, $A \times B = [-1,2) \times (0,3)$,

   $A \times C = \{(x,-1),(x,0),(x,1) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 \le x \le 2\} =$

   $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [-1,2],\ y \in \{-1,0,1\}\}$.

2. $\operatorname{card} A_1 \times A_2 \times A_3 = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$.
   $\operatorname{card} \mathcal{P}(A_1) \times \mathcal{P}(A_2) \times \mathcal{P}(A_3) = 2^{n_1+n_2+n_3}$.
   $\operatorname{card} \mathcal{P}(A_1 \times A_2 \times A_3) = 2^{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3}$.

3. $|p - 15| \leq 0{,}9$.

4. $A = [-1, \infty)$. Luego $\inf A = \min A = -1$, y no existen $\sup A$ y $\max A$.
   $B = (-\infty, -3) \cup (1, 3)$. Luego $\sup B = 3$, pero $\inf B$, $\max B$ y $\min B$ no existen.
   $C = (-\infty, 3)$. Luego $\sup C = 3$, pero $\max C$, $\inf C$ y $\min C$ no existen.
   $D = [-2, 5)$. Luego $\sup D = 5$, $\inf D = \min D = -2$ y $\nexists \max D$.
   $E = [-11/2, -4)$. Luego $\sup E = -4$, $\nexists \max E$ y $\min E = \inf E = -5{,}5$.
   $F = (-21/5, 13/5)$. Luego $\sup F = 13/5$, $\inf F = -21/5$, y $\max F$ y $\min F$ no existen.
   $G = (-23/7, -3) \cup (-3, -19/7)$. Luego $\sup G = -19/7$, $\inf G = -23/7$, y $\max G$ y $\min G$ no existen.
   $H = [-1, 1] \cup [3, \infty)$. Luego $\inf H = \min H = -1$, y $\sup H$ y $\max H$ no existen.

5. $\operatorname{int} A = \emptyset$, $\quad \operatorname{ext} A = \mathbb{R} - A - \{1\}$, $\quad \operatorname{ais} A = A$, $\quad A' = \{1\}$,
   $\overline{A} = \partial A = A \cup \{1\}$.
   $\operatorname{int} B = (1, 3)$, $\quad \operatorname{ext} B = \mathbb{R} - \mathbb{Z} - (1, 3)$, $\quad \operatorname{ais} B = \mathbb{Z} - \{1, 2, 3\}$, $\quad B' = [1, 3]$,
   $\overline{B} = \mathbb{Z} \cup (1, 3) = B$, $\quad \partial B = \mathbb{Z} - \{2\}$.
   Con la modificación indicada en las erratas: $\quad \operatorname{int} C = (-3, -1) \cup (1, 2)$,
   $$\operatorname{ext} C = (-\infty, -3) \cup (-1, 0) \cup (2, \infty) \cup \left[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)\right],$$
   $$\operatorname{ais} C = \left\{\frac{1}{n+1} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad C' = [-3, -1] \cup \{0\} \cup [1, 2],$$
   $$\overline{C} = [-3, -1] \cup [1, 2] \cup \left\{\frac{1}{n+1} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\} \quad \text{y}$$
   $$\partial C = \left\{\frac{1}{n+1} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{-3, -1, 0, 1, 2\}.$$
   $\operatorname{int} D = \operatorname{ext} D = \operatorname{ais} D = \emptyset$ y $D' = \overline{D} = \partial D = \mathbb{R}$.

8. $\operatorname{int} A = A$, $\quad \operatorname{ais} A = \emptyset$, $\quad A' = \overline{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} ([n, n+1] \times [n, n+1])$,
   $$\operatorname{ext} A = \mathbb{R}^2 - \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} ([n, n+1] \times [n, n+1]) \quad \text{y}$$
   $\partial A = \{(n, y) \,:\, n \in \mathbb{Z},\, y \in [n-1, n+1]\} \cup \{(x, n) \,:\, n \in \mathbb{Z},\, x \in [n-1, n+1]\}$.

9. (a) $(3, -3, 3)$. $\quad$ (b) $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$.

10. (a) $(7/2, -1/2, 5/2)$. $\quad$ (b) $(4, -1, 3)$.

11. $\pm \dfrac{1}{\sqrt{14}}(1, 3, -2)$.

12. $u \times v = (0, 0, u_1 v_2 - u_2 v_1)$. Es un vector perpendicular al plano xy.

15. $u \times (v \times w)$ está en el plano que contiene a los vectores v y w.

$(u \times v) \times w$ está en el plano que contiene a los vectores u y v.

16. Vectorial: $(x, y) = (1, -1) + t(1, 4)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 1 + t, \\ y = -1 + 4t \end{array}\right\}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Continua: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{4}$.

Normal: $(x - 1, y + 1) \cdot (-4, 1) = -4(x - 1) + y + 1 = 0$.

17. Normal: $(x + 2, y - 1) \cdot (1, 3) = x + 2 + 3(y - 1) = 0$.

Vectorial: $(x, y) = (-2, 1) + t(-3, 1)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

18. Paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 5, \\ y = 1 + t, \\ z = 1 + 2t \end{array}\right\}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Continua: $\dfrac{x-5}{0} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{2}$.

Vectorial: $(x, y, z) = (5, 1, 1) + t(0, 1, 2)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Reducidas: $\left.\begin{array}{l} x = 5, \\ y = \dfrac{z+1}{2}. \end{array}\right\}$

19. Paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 1 - t, \\ y = 7 - 5t, \\ z = 1 + 2t \end{array}\right\}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Continua: $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-7}{-5} = \dfrac{z-1}{2}$.

Vectorial: $(x, y, z) = (1, 7, 1) + t(-1, -5, 2)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Reducidas: $\left.\begin{array}{l} y = 5x + 2, \\ z = -2x + 3. \end{array}\right\}$

20. Paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 1 + t, \\ y = 2 - 3t, \\ z = 3 + t \end{array}\right\}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Continua: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-3}{1}$.

Vectorial: $(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(1, -3, 1)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Reducidas: $\left.\begin{array}{l} y = -3x + 5, \\ z = x + 2. \end{array}\right\}$

21. Paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 1 + \alpha, \\ y = 1 - \beta, \\ z = 1 + 2\alpha \end{array}\right\}$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Normal: $(x - 1, y - 1, z - 1) \cdot (2, 0, -1) = 0$. General: $2x - z = 1$.

22. Normal: $(x - 1, y - 0, z + 2) \cdot (1, 2, 3) = 0$. General: $x + 2y + 3z + 5 = 0$.

Paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 1 + 10\alpha + 15\beta, \\ y = -5\alpha, \\ z = -2 - 5\beta \end{array}\right\}$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

23. (a) $|z| = 3$, $\quad |w| = 2\sqrt{3}$, $\quad \arg z = 3\pi/2$, $\quad \arg w = 5\pi/6$.
(b) $e^z = \cos 3 - i \operatorname{sen} 3$, $\quad e^w = e^{-3}\cos\sqrt{3} + ie^{-3}\operatorname{sen}\sqrt{3}$, $\quad |e^z| = 1$,
$|e^w| = e^{-3}$, $\quad \arg e^z = 2\pi - 3$, $\quad \arg e^w = \sqrt{3}$.
(c) $z^2 = -9$, $\quad z^3 = 27i$, $\quad w^2 = 6 - 6\sqrt{3}i$, $\quad w^3 = 24\sqrt{3}i$.

24. $|z| = |w|$.

25. (a) Falsa. (b) Cierta.

Capítulo 2

Sección 2.1.4

1. (a) Sí. (b) No. (c) Sí.

2. (a) $x = 0$ si $\alpha \neq 0$, pero si $\alpha = 0$ todo número real es solución de la ecuación.
(b) $(x, y) = (\lambda - 7/3, \lambda)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Si $k \neq 6$ las soluciones del sistema son la intersección de dos rectas paralelas (sistema incompatible); si $k = 6$ las soluciones del sistema son la intersección de dos rectas coincidentes (sistema compatible indeterminado).

Sección 2.2.5

1. $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -11/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\qquad B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 23/8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/8 \end{pmatrix}$.

2. $\operatorname{ran} C = 3$.

3. 1^{er} sistema: incompatible. $\quad 2^{\text{o}}$ sistema: $(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0)$.
3^{er} sistema: $(x, y, z) = (2, -1, 3)$. $\quad 4^{\text{o}}$ sistema: $(x, y, z, w) = (-y - 9, y, 7, 0)$.
5^{o} sistema: $(x, y, z, w) = (1, 0, 2, 0)$. $\quad 6^{\text{o}}$ sistema: incompatible.

4. 1^{er} sistema: si $a \neq \pm 4$, $(x, y, z) = \left(\frac{8}{7} - \frac{1}{a+4}, \frac{10}{7} + \frac{2}{a+4}, \frac{1}{a+4}\right)$;
si $a = 4$, $(x, y, z) = \left(\frac{8}{7} - z, \frac{10}{7} + 2z, z\right)$; si $a = -4$, es incompatible.
2^{o} sistema: si $a \neq 2$ y $a \neq 4$, $(x, y) = (0, 0)$;
si $a = 2$, $(x, y) = (y, y)$; si $a = 4$, $(x, y) = (-y, y)$.

5. Deben cumplir que $c = 5a - 2b$.

6. Es compatible determinado con solución $(x, y, z) = (-1, 2, 4)$.

Sección 2.3.5

1. $(x, y, z, w) = (2, 4, 1, 3)$.

2. (a) Falsa, salvo en el caso de que $AB = BA$.

   (b) Falsa, salvo en el caso de que $p = n$.

3. Si $a \neq 6$, B sólo puede ser la matriz nula 0_2. Si $a = 6$, entonces B es cualquier matriz de la forma $\begin{pmatrix} x & y \\ -x/2 & -y/2 \end{pmatrix}$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

4. Son todas las matrices de la forma $B = \begin{pmatrix} c+d & 2c/3 \\ c & d \end{pmatrix}$, con $c, d \in \mathbb{R}$.

5. Tras resolver un sistema con 4 incógnitas (los 4 coeficientes de la matriz inversa) se llega a que $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$.

6. Se trata de obtener que $A \cdot A \neq 0_3$ y que $A \cdot A \cdot A = 0_3$.

Sección 2.4.4

3. $A^{-1} = \dfrac{1}{120} \begin{pmatrix} 63 & 84 & -24 & -24 \\ -48 & -24 & 24 & 24 \\ 68 & 64 & -64 & -24 \\ 15 & -60 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \dfrac{1}{423} \begin{pmatrix} -8 & 15 & 93 & 55 \\ -90 & 63 & -117 & 90 \\ 17 & 21 & -39 & -64 \\ -83 & -3 & 66 & -11 \end{pmatrix}$,

   $C^{-1} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -5 & 4 & 6 \\ -7 & 5 & -4 & -3 \\ -1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Es más fácil hacer las inversas de esas matrices por el método de los adjuntos. En cualquier caso, se obtiene que la matriz A es inversible para todo $a \neq -1$, B es inversible para todo $a \neq 2$ y $a \neq \pm\sqrt{2}$ y C lo es para todo $a \in \mathbb{R}$, y las inversas son:

   $A^{-1} = \dfrac{1}{8(1+a)} \begin{pmatrix} -16 & 8 & 8 \\ 6a-6 & 2-4a & 6 \\ 9-a & 2a-3 & -5 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a+1}{2-a^2} & \frac{1}{(a-2)(2-a^2)} & \frac{1}{2-a^2} \\ 0 & \frac{1}{2-a} & 0 \\ \frac{1}{2-a^2} & \frac{a-1}{(a-2)(2-a^2)} & \frac{a-1}{2-a^2} \end{pmatrix}$,

   $C^{-1} = C^t = \begin{pmatrix} \cos a & -\operatorname{sen} a & 0 \\ \operatorname{sen} a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Sección 2.5.4

1. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} +$

   $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} +$
   $a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} -$

$a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$.

2. -18.

4. El valor del determinante es $(x-1)^6$. Luego la solución de la ecuación es $x = 1$.

Sección 2.6.4

1. El rango es 3.

2. El rango es 3 si $a \neq 2$; el rango es 1 si $a = 2$.

4. $B^{-1} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 10 & 0 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$ y $B^2B^{-1} = B$.

5. (a) El sistema es siempre compatible indeterminado: si $a = -1/2$ y $b = 5/4$, la solución depende de dos parámetros; en cualquier otro caso depende de un solo parámetro.

Sección 2.8

1. (a) Cuando las tres rectas coinciden.

   (b) Cuando las tres rectas se cortan en un punto (bien siendo distintas las tres rectas o bien siendo dos iguales y la otra las corta).

   (c) Hay cuatro casos posibles: que las tres rectas sean distintas y paralelas; que dos rectas coincidan y la tercera sea paralela; que dos rectas sean paralelas y la tercera corte a ambas; que las tres rectas se corten dos a dos (formando un triángulo).

   En el caso homogéneo, las tres rectas pasan por el origen, manteniéndose los casos considerados en las respuestas (a) y (b) y siendo imposible cualquiera de los casos contemplados en (c).

2. La solución es: $(x, y, z) = (az + p, bz + q, z)$ (una recta, intersección de los dos planos definidos por las ecuaciones). Observe que $(x, y, z) = (az + p, bz + q, z) = (p, q, 0) + (a, b, 1)z$, y que por tanto las soluciones forma la recta que pasa por el punto $(p, q, 0)$ con vector director $(a, b, 1)$.

3. Cada ecuación corresponde a un plano. Observando los coeficientes de esas ecuaciones, es claro que los tres planos son paralelos o coincidentes. Luego el sistema será incompatible cuando al menos dos de los parámetros a, b y c sean distintos; y será compatible indeterminado (dependiendo la solución de dos parámetros) cuando $a = b = c$.

4. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1+(-1)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

5. (a) Se trata de un sistema lineal de 3 ecuaciones y 2 incógnitas incompatible en el que cada par de ecuaciones forman un sistema compatible determinado.

   (b) Se trata de un sistema lineal de 4 ecuaciones y 3 incógnitas incompatible en el que cada par de ecuaciones forman un sistema compatible indeterminado dependiente de un parámetro y cada trío de ecuaciones forman un sistema compatible determinado.

6. Se responde aquí a la solución de este ejercicio según la modificación indicada en la sección de erratas. Si el número de horas diarias que trabajan las cuatro hormigoneras se denota respectivamente por x, y, z, w, entonces la respuesta a la primera pregunta es: $(x,y,z,w) = \left(3-\frac{w}{4}, 5-\frac{5w}{12}, 4-\frac{w}{3}, w\right)$. Y los números de horas máximo y mínimo que puede trabajar la cuarta hormigonera es de 11 y 1, respectivamente.

7. (a) Incompatible. (b) Incompatible. (c) $(x,y) = (2y+3, y)$.
   (d) $(x,y,z,s,t) = (7-2y-3s, y, -1, s, 2)$. (e) $(x,y,z) = (3,1,2)$.
   (f) $(x,y,z,w) = (3,5,-1,8)$. (g) $(x,y,z) = (-4,2,7)$.
   (h) $(x,y,z,w) = (w-1, 2z, z, w)$. (i) $(x,y,z,w) = (-z/4, -z/4-w, z, w)$.
   (j) $(x,y,z) = (z/8, 5z/16, z)$. (k) $(x,y,z) = (-3z/7, -4z/7, z)$.
   (l) $(x,y,z) = (0,0,0)$.

8. (a) Si $1 \neq a \neq b$, $(x,y,z) = \left(0, \frac{b-1}{b-a}, \frac{1-a}{b-a}\right)$; si $1 \neq a = b$, es incompatible; si $1 = a \neq b$, $(x,y,z) = (1-y, y, 0)$; si $1 = a = b$, $(x,y,z) = (1-y-z, y, z)$.

   (b) Si $a = \frac{40}{11}$, $(x,y,z) = \left(-\frac{14z}{11}, -\frac{12z}{11}, z\right)$; si $a \neq \frac{40}{11}$, $(x,y,z) = (0,0,0)$.

   (c) Si $a \neq 0$ y $b \neq 2$, $(x,y,z) = \left(\frac{2-b}{a}, \frac{b-2}{a}, 1\right)$; si $a \neq 0$ y $b = 2$, $(x,y,z) = \left(\frac{2-2z}{a}, \frac{2-2z}{a}, z\right)$; si $a = 0$ y $b \neq 2$, es incompatible; si $a = 0$ y $b = 2$, $(x,y,z) = (x,y,1)$.

   (d) $(x,y) = ((6a-b)/9, (-3a+2b)/9)$.

   (e) $(x,y,z) = (a-c/3, a-b/2, -a+b/2+c/3)$.

   (f) Si $a \neq 3, -\frac{12}{7}$, $(x,y,z) = (0,0,0)$; si $a = 3$, $(x,y,z) = (-5z, -2z, z)$; si $a = -\frac{12}{7}$, $(x,y,z) = (28z, -35z, z)$.

   (g) Si $a \neq -3, 0, 2$, $(x,y,z) = \left(\frac{3}{a+3}, \frac{2a-9}{(a-2)(a+3)}, \frac{4a-3}{(a-2)(a+3)}\right)$; si $a = -3$, es incompatible; si $a = 0$, $(x,y,z) = (2-2z, 1+z, z)$; si $a = 2$, es incompatible.

   (h) Si $a \neq -24, 2$, $(x,y,z) = \left(\frac{12(a-2)}{a+24}, \frac{3(a-2)}{a+24}, -\frac{2a(a-2)}{a+24}\right)$; si $a = -24$, es incompatible; si $a = 2$, $(x,y,z) = (\frac{-5z}{6}, \frac{z}{3}, z)$.

9. Este ejercicio es complicado. Cuando n es un múltiplo de 3, esto es, $n = 3k$ (k=1,2,...), el sistema es compatible determinado (su única solución es la trivial); lo mismo ocurre cuando $n = 3k+1$ (k=1,2,...). Pero cuando $n = 3k+2$ (k=1,2,...), entonces el sistema es compatible indeterminado, y la solución es:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots x_{n-4}, x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) =$$
$$= (-x_n, x_n, 0, -x_n, x_n, 0, \dots -x_n, x_n, 0, -x_n, x_n),$$

   es decir, $x_{3i} = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots k$, $x_{3i-1} = x_n$ para todo $i = 1, 2, \dots k+1$, y $x_{3i-2} = -x_n$ para todo $i = 1, 2, \dots k+1$.

10. $(a,b,c) = (\pi/2, \pi, 0)$.

11. (a) El sistema es compatible (indeterminado dependiendo de dos parámetros) si y sólo si $b_1 = b_2 = -b_3/2$.

(b) El sistema es compatible (indeterminado dependiendo de un parámetro) si y sólo si $b_3 = b_1 + b_2$.

(c) El sistema es compatible (determinado) para cualesquiera $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$.

12. (a) $(x, y, z) = (16/3, -4/3, -11/3)$. (b) $(x, y, z) = (-5/3, 5/3, 10/3)$.
(c) $(x, y, z) = (3, 0, -4)$. (d) $(x, y, z) = (41/42, -5/6, 25/21)$.

13. $k = -1$ y $k = 12/11$.

14. Observe que: los resultados de (c) y (f) son el mismo, por lo que basta hacer uno de estos apartados; una vez resueltos los apartados (g) y (h) se puede obtener fácilmente el resultado del apartado (i) ya que $(AC)^{-1} = C^{-1}A^{-1}$; (f) puede obtenerse a partir de (e), pero (c) no puede obtenerse a partir de (b).

15. Observe que en los tres apartados se puede despejar la matriz X de la siguiente forma:

(a) $X = A^{-1}(C - B)$ (A^{-1} se ha calculado en el apartado (g) del ejercicio 14).

(b) $X = BC^{-1}$ (C^{-1} se ha calculado en el apartado (h) del ejercicio 14).

(c) $X = (AC)^{-1}CA$ ($(AC)^{-1}$ y CA se han calculado en los apartados (i) y (d), respectivamente, del ejercicio 14).

16. Al resolver los sistemas se obtiene:

(a) $A = \dfrac{1}{4}(3C + 5D)$, $B = \dfrac{1}{4}(C + 3D)$; (b) $E = 2G - H$, $F = 2H - 3G$.

Y sólo resta sustituir C, D, G y H por su valor.

18. Las matrices pueden ser de las tres formas siguientes: $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$, donde a, b y c son distintos de cero.

19. (a) $M^n = 3^{n-1}M$ y $B^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Nunca ocurrirá que $B^2 = B$ ni que $B^2 = I_2$; y $B^2 = 0_2$ si y sólo si $a = 0$.

20. (a) $M^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

21. (a) Ejemplos de matriz simétrica: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$.

Ejemplos de matriz antisimétrica: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) $A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$.

22. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3/2 & 2 \\ -3/2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 5/2 & 1 \\ -5/2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

23. (a) Se llega a que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ $(a, b, d \in \mathbb{R})$ o $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

24. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

25. $A_1^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \nexists A_3^{-1},$

$B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & -1{,}1 & -1{,}2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}4 \end{pmatrix}, \qquad \nexists B_2^{-1}, \qquad B_3^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$

$C_1^{-1} = \begin{pmatrix} 3{,}5 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C_2^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C_3^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$

$D_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D_2^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix},$

$E_1^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \nexists E_2^{-1}.$

26. $A^{-1} = \dfrac{1}{a^2 - 5a + 2}\begin{pmatrix} a-2 & 2 \\ 2 & a-3 \end{pmatrix}$, si $a \neq \dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$; $\quad \nexists A^{-1}$ si $a = \dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$.

$B^{-1} = \dfrac{1}{2b}\begin{pmatrix} -b & 1 & 3b \\ b & -1 & -b \\ b & 1 & -b \end{pmatrix}$, si $b \neq 0$; $\quad \nexists B^{-1}$ si $b = 0$.

$C^{-1} = \dfrac{1}{a(b-2)}\begin{pmatrix} -2 & b & -b \\ -2 & 2 & b-4 \\ a & -a & a \end{pmatrix}$, si $a \neq 0$ y $b \neq 2$; $\quad \nexists C^{-1}$ si $a = 0$ o $b = 2$.

$D^{-1} = \dfrac{1}{a^4}\begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 & 0 \\ -a^2 & a^3 & 0 & 0 \\ a & -a^2 & a^3 & 0 \\ -1 & a & -a^2 & a^3 \end{pmatrix}$, si $a \neq 0$; $\quad \nexists D^{-1}$ si $a = 0$.

27. (a) -21 (con la corrección —indicada en las erratas— de sustituir el 13 que aparece en la matriz por 3). (b) 6.

28. (a) -120. (b) 0.

29. $\det(A_1) = -1, \quad \det(A_2) = 1, \quad \det(A_3) = 0,$

$\det(B_1) = -10, \quad \det(B_2) = 0, \quad \det(B_3) = -2,$

$\det(C_1) = 2, \quad \det(C_2) = -2, \quad \det(C_3) = -6,$

$\det(D_1) = 1/10, \quad \det(D_2) = 1, \quad \det(E_1) = 64, \quad \det(E_2) = 0,$

$\det(A) = a^2 - 5a + 2, \quad \det(B) = 2b, \quad \det(C) = a^2(b-2), \quad \det(D) = a^4.$

30. (a) 8. (b) $x(x-a)(x-d)(x-f)$. (c) $abc(b-a)(c-a)(c-b)$. (d) $(b^2-a^2)^4$.

31. (a) $x = \pm 4$. (b) $x = 1$ y $x = 2$.

32. (a) 135. (b) $\dfrac{8}{5}$. (c) $\dfrac{1}{40}$. (d) 5. (e) -5. (f) 5. (g) 5. (h) 10.

33. Otra matriz que tiene esa propiedad es la matriz identidad.

37. (a) 0 y 1.

39. (a) Basta fijarse en los resultados del ejercicio 29.

(b) Los resultados son obviamente los mismos que los de los ejercicios 25 y 26.

41. (a) $(I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (b) $(I-A)^n = \begin{pmatrix} 1 & -n & \frac{n(n-1)}{2} & \frac{-n(n-1)(n-2)}{6} \\ 0 & 1 & -n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) $(I+A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (d) $(I+A)(I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

42. (a) El rango es 3 si $\alpha \neq 2$ y $\alpha \neq 3$; el rango es 2 si $\alpha = 2$ o $\alpha = 3$.

(b) El rango es 4 si $\alpha \neq 3$; el rango es 2 si $\alpha = 3$.

43. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

45. (a) Si $a \neq 2b$, es compatible determinado; si $a = 2b$, es incompatible.

(b) Si $a \neq -3, 0, 2$, es compatible determinado; si $a = 0$, es compatible indeterminado (dependiendo la solución de un parámetro); si $a = -3$ ó $a = 2$, es incompatible. *Nota*: el sistema es el mismo que el del apartado (g) del ejercicio 8 de esta sección.

(c) Si $a \neq 0$, es compatible determinado; si $a = 0$, es incompatible.

(d) Si $a \neq -2$ y $a \neq 1$, es compatible determinado; si $a = -2$, es incompatible; si $a = 1$, es compatible indeterminado (dependiendo la solución de dos parámetros).

(e) Si $1 \neq a \neq b$, es compatible determinado; si $1 = a \neq b$, es compatible indeterminado (dependiendo la solución de un parámetro); si $1 = a = b$, es compatible indeterminado (dependiendo la solución de dos parámetros); si $1 \neq a = b$, es incompatible. *Nota*: el sistema es el mismo que el del apartado (a) del ejercicio 8 de esta sección.

(f) Si $-1 \neq a \neq 0$, es compatible determinado; si $a = -1$ y $b = 0$, es compatible indeterminado (dependiendo la solución de un parámetro); si $a = 0$ y $b = 0$, es compatible indeterminado (dependiendo la solución de un parámetro); si $a = -1$ y $b \neq 0$, es incompatible; si $a = 0$ y $b \neq 0$, es incompatible.

(g) Si $-1 \neq a \neq 1$, es compatible determinado; si $a = 1$, es compatible indeterminado (dependiendo la solución de dos parámetros); si $a = -1$, es incompatible.

(h) Si $a \neq -1$, es incompatible; si $a = -1$, es compatible indeterminado (dependiendo la solución de un parámetro).

(i) Si $a \neq \frac{-2\pm\sqrt{58}}{3}$, es compatible determinado; si $a = \frac{-2\pm\sqrt{58}}{3}$, es compatible determinado (dependiendo la solución de un parámetro).

(j) Si $a \neq 2$, es compatible determinado; si $a = 2$, es compatible determinado (dependiendo la solución de un parámetro).

(k) Si $a \neq -24$ y $a \neq 2$, es compatible determinado; si $a = -24$, es incompatible; si $a = 2$, es compatible indeterminado (dependiendo la solución de un parámetro). *Nota*: el sistema es el mismo que el del apartado (h) del ejercicio 8 de esta sección.

(l) Si $a \neq -3$, es compatible determinado; si $a = -3$ y $b = 0$, es compatible indeterminado (dependiendo la solución de un parámetro); si $a = -3$ y $b \neq 0$, es incompatible.

(m) Si $2 \neq a \neq \frac{b+1}{3}$, es compatible determinado; si $a = 2$, es compatible indeterminado (dependiendo la solución de un parámetro); si $a = \frac{b+1}{3}$, es compatible indeterminado (dependiendo la solución de un parámetro).

(n) Si $a \neq \frac{3b+1}{5}$, es incompatible; si $a = \frac{3b+1}{5}$ y $b \neq 8$, es compatible determinado; si $b = 8$ y $a = \frac{3b+1}{5} = 5$, es incompatible.

(ñ) Si $1 \neq a \neq 2$, es incompatible; si $a = 1$, es compatible determinado; si $a = 2$, es compatible determinado.

(o) Si $a \neq 1$, es compatible indeterminado (y la solución depende de un parámetro); si $a = 1$, es compatible indeterminado (dependiendo la solución de dos parámetros).

46. $(x, y, z, u) = (3u/8, u/4, -7u/8, u)$.

Capítulo 3

Sección 3.1.4

1. $\operatorname{Dom} a = [-1, 1]$. $\operatorname{Dom} b = \mathbb{R}$. $\operatorname{Dom} c = (-\infty, 4)$.
   $\operatorname{Dom} d = (-1, \infty)$. $\operatorname{Dom} e = \mathbb{R} - (-1, 3]$. $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

2. $(f+g)(x) = \begin{cases} 5x-4 & x < 1, \\ 2x+5 & 1 \leq x \leq 3, \\ 7-2x^2 & x > 3. \end{cases}$ $\quad (f \cdot g)(x) = \begin{cases} 2(x-1)(3x-2) & x < 1, \\ 14(x-1) & 1 \leq x \leq 3, \\ -14x^2 & x > 3. \end{cases}$

   $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 6(x-1) & x < 1, \\ -98 & x > 1. \end{cases}$

4. (a) $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{4}$ y $\operatorname{Dom} f^{-1} = \mathbb{R}$.

   (b) $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{4x - x^2 - 3}$ y $\operatorname{Dom} g^{-1} = [2, \infty)$.

5. f no es inyectiva en $(-\infty, \infty)$. Sí lo es en $[0, \infty)$, donde $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

6. Estrictamente creciente en $\left[\dfrac{-\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, y estrictamente decreciente en $\left[\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

8. A los $2 + \sqrt{10}$ días de aplicar el pesticida.

Sección 3.2.4

1. El conjunto A es la superficie esférica centrada en $(0,0,0)$ y radio 1.

   El conjunto B es el cilindro de radio 1 cuyo eje de rotación es el eje de y.

   El conjunto D es el cubo cuyas caras se sitúan en los planos $x=-1$, $x=1$, $y=-1$, $y=1$, $z=-1$ y $z=1$.

2. $\operatorname{Dom} a = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x\neq 0,\, y\neq 0\}$, es decir, el dominio es el plano $\mathbb{R}^2$ menos los ejes de coordenadas.

   $\operatorname{Dom} b = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, y\geq 0\}$, o sea, el semiplano superior (incluido el eje x).

   $\operatorname{Dom} c = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, xy<4\}$, es decir, se trata de la región compuesta por los cuadrantes segundo y cuarto, la parte del primer cuadrante que queda por debajo de la gráfica de la función $y=4/x$ y la parte del tercer cuadrante que queda por encima de la gráfica de dicha función, incluidos los ejes coordenados.

5. Las superficies de nivel k de la función f son $x^2+y^2+z^2=1-k^2$, es decir, superficies esféricas centradas en $(0,0,0)$ y radio $\sqrt{1-k^2}$. Observe que k debe pertenecer al intervalo $[0,1]$; y que si $k=1$, entonces la superficie es degenerada (se reduce al origen).

Sección 3.3

1. (a) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}-\{0\}$. (b) $\operatorname{Dom} g = \mathbb{R}-\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,:\, k\in\mathbb{Z}\}$.

   (c) $\operatorname{Dom} h = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x>0\}$, o sea, el semiplano derecho abierto.

   (d) $\operatorname{Dom} k = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, z>x-3, z\neq 0\}$, es decir, la parte de $\mathbb{R}^3$ que queda encima de la gráfica del plano $z-x+3=0$ sin incluir los puntos del plano xy.

3. (a) $(g\circ f)(t)=0$. (b) $(g\circ f)(r,\varphi)=r^2$.

Sección 3.4.4

1. (a) f es continua en $\mathbb{R}-\{1,2\}$ y en los puntos 1 y 2 presenta una discontinuidad esencial.

   (b) f es continua en $\mathbb{R}-(-1,1)$.

   (c) f es continua en $\mathbb{R}-\{2\}$ y en el punto 2 presenta una discontinuidad evitable.

   En los casos (d), (e) y (f) la función f es continua en $\mathbb{R}$.

2. $m=5$ y $n=0$.

3. Observe primero que ambas composiciones tienen sentido, ya que $\operatorname{Im} f\subset \operatorname{Dom} g$ e $\operatorname{Im} g\subset\operatorname{Dom} f$. Por otra parte, $f\circ g$ y $g\circ f$ son continuas en $[0,2]$ por ser composición de funciones continuas.

4. $a=1$ y $b=2$.

7. (a) 0. (b) 0. (c) $\sqrt{3}$. (d) a^2.

Sección 3.5

1. Los límites pedidos son, respectivamente: ∞, ∞, $1/2$ e ∞.
2. Para f basta tomar las trayectorias $x = 0$ e $y = 0$.

   Para g, las trayectorias $y = x$ e $y = 2x$ (o, en general, $y = mx$).

   Para h, las trayectorias $x = 0$ e $y = x$.

Sección 3.7.4

1. Sí, basta aplicar el teorema de Bolzano a g en el intervalo $[1, 9]$.
3. La función f sí es continua en $(2, 4]$, sin embargo, no está acotada en dicho intervalo y posee un mínimo absoluto en $x = 4$ cuyo valor es $\frac{1}{2}$.
4. Basta aplicar el teorema de Bolzano a $f(x) = x^3 + xg(x) + 2$ en el intervalo $[-2, 0]$.
5. 15 veces.

Sección 3.8

1. $\operatorname{Dom} a = \mathbb{R}$. $\operatorname{Dom} b = \mathbb{R} - \{0\}$. $\operatorname{Dom} c = [e^2, \infty)$.

   $\operatorname{Dom} d = [-1, 1]$. $\operatorname{Dom} e = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$. $\operatorname{Dom} f = (0, \infty) - \{1, 2\}$.
2. $\operatorname{Im} a = (2, \infty)$. $\operatorname{Im} b = \mathbb{R}$. $\operatorname{Im} c = [3, \infty)$. $\operatorname{Im} d = [-1, \infty)$.
3. (a) Sí. (b) Sí. (c) Sí se puede definir $f \circ g$ pero no $g \circ f$.
4. (a) Sí, $a^{-1}(x) = 4 - \dfrac{9}{(x-2)^2}$ para todo $x \in (2, \infty)$.

   (b) Sí, $b^{-1}(x) = \dfrac{x+7}{3}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   (c) No. (d) Sí, $d^{-1}(x) = \sqrt{1 - \dfrac{1}{x+2}}$ para todo $x \in [-1, \infty)$.
5. La vida media del uranio es $\dfrac{\ln 2}{k}$.
6. $\operatorname{Dom} a = \mathbb{R}^3$, que es un conjunto abierto, cerrado, conexo y convexo.

   $\operatorname{Dom} b = B[(0, 0), 1]$, es decir, el círculo de centro $(0, 0)$ y radio 1, que es un conjunto cerrado, conexo y convexo.

   $\operatorname{Dom} c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x > 0,\ y > 0\}$, es decir, los puntos de $\mathbb{R}^3$ que se proyectan verticalmente sobre el primer cuadrante abierto del plano xy; este dominio es abierto, conexo y convexo.

   $\operatorname{Dom} d = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq xy \leq 2\}$, es decir, se trata de la región compuesta por la parte del primer cuadrante que queda por debajo de la gráfica de la función $y = 2/x$ y la parte del tercer cuadrante que queda por encima de la gráfica de dicha función, incluyendo los puntos de la gráfica y los ejes coordenados; es un dominio cerrado y conexo, pero no convexo.

$\mathrm{Dom}\, e = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0,\, y \neq 0\}$, o sea, el semiplano derecho (a partir del eje y sin incluir a éste) excepto el semieje positivo x, que es un dominio es abierto y disconexo.

$\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}^3 - \{(x,y,z) \,:\, x+y-z=0\}$, es decir, cualquier punto de $\mathbb{R}^3$ que no pertenezca al plano de ecuación $x+y-z=0$; es un dominio abierto y disconexo.

$\mathrm{Dom}\, g = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, y \neq 0,\, z \neq 0\}$, o sea, los puntos de $\mathbb{R}^3$ que no están en los planos coordenados xz y xy; es un dominio abierto y disconexo.

$\mathrm{Dom}\, h = \mathbb{R}^3 - B[(0,0,0),1]$, es decir, el conjunto complementario de la bola cerrada centrada en $(0,0,0)$ y radio 1, que es un dominio abierto y conexo, pero no convexo.

7. $\mathrm{Im}\, a = (-\infty, 1)$. $\mathrm{Im}\, b = \mathbb{R} - \{0\}$. $\mathrm{Im}\, c = [-1, \infty)$. $\mathrm{Im}\, d = [0,1]$.

8. Las curvas de nivel de f son todas las rectas de pendiente $-2/3$.

   Las de g son todas las parábolas cuya ecuación es de la forma $y = x^2/5 + c$, con $c \in \mathbb{R}$.

   Las de h son todas las circunferencias con centro en el origen (incluida la curva degenerada que se reduce a dicho punto).

   Las de k son todas las hipérbolas equiláteras cuya ecuación es de la forma $y = c/x$, con $c \in \mathbb{R}$.

   Las de l son todas las circunferencias con centro en el punto $(1,-2)$ (incluida la curva degenerada que se reduce a dicho punto).

   Las de m son todas las elipses cuyos ejes se sitúan sobre los ejes coordenados de manera que el eje vertical es $\sqrt{2}$ veces mayor que el eje horizontal (incluida la elipse degenerada que se reduce al origen de coordenadas).

9. Las superficies de nivel de la función a son todos los planos cuya ecuación es de la forma $2x + 3y + 5z = k$, con $k \in \mathbb{R}$, es decir, todos los planos perpendiculares al vector $n = (2,3,5)$.

   Las de b son las superficies de ecuación $x^2+y^2+z^2 = k$, con $k \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, es decir, las superficies esféricas centradas en $(0,0,0)$ y de radio cualquiera $\sqrt{k}$ (incluida la superficie degenerada que se reduce al origen).

   Las de c son las superficies de ecuación $x^2+y^2 = k$, con $k \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, es decir, las superficies cilíndricas (de longitud infinita) cuyo eje de revolución es el eje z y de radio cualquiera $\sqrt{k}$ (incluida la superficie degenerada que se reduce al eje z).

   Las de d son las superficies de ecuación $xz = k$, con $k \in \mathbb{R}$: si $k = 0$, es una superficie formada por dos planos coordenados —el xy y el yz—; si $k \neq 0$ es la superficie formada por todos los puntos que se proyectan perpendicularmente sobre el plano xz en la hipérbola de ecuación $z = k/x$.

   Las de e son las superficies de ecuación $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2 = k$, con $k \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, es decir, las superficies esféricas centradas en $(1,-2,0)$ y de radio cualquiera $\sqrt{k}$ (incluida la superficie degenerada que se reduce al dicho punto).

   Las de f son las superficies de ecuación $(x-1)^2+z^2 = k$, con $k \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, es decir, las superficies cilíndricas (de longitud infinita) de radio cualquiera $\sqrt{k}$ cuyo eje de revolución pasa por el punto $(1,0,0)$ y es paralelo al eje y, es decir, es el formado por los puntos $(1,y,0)$, para todo $y \in \mathbb{R}$.

10. $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. $\operatorname{Dom} g = \mathbb{R}^+ - \{1\}$.

    $\operatorname{Dom} h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0,\, y > 0\}$, es decir, el primer cuadrante excepto el semieje positivo x.

    $\operatorname{Dom} j = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x > y,\, z \neq 0\}$. Todas las funciones son continuas en su dominio.

11. La función f es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$ y en el punto 1 presenta una discontinuidad de salto.

    g es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ y en el punto 0 presenta una discontinuidad de salto.

    h es continua en $\mathbb{R}$.

    i es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ y en el punto 0 presenta una discontinuidad de salto.

    j es continua en $\mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$, en el punto 0 presenta una discontinuidad de salto, en el punto 1 presenta una discontinuidad esencial y en el punto 2 presenta una discontinuidad evitable.

    h es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ y en el punto 0 presenta una discontinuidad de salto.

13. Si llamamos (a), (b), (c), etc. a los distintos límites, empezando por los de la primera línea y de izquierda a derecha, los resultados son:

    (a) $1/2$. (b) No existe, pues es 0 si $x \to 0^-$ y es $3/2$ si $x \to 0^+$.

    (c) $3/2$ (compruebe que el límite cuando $x \to -\infty$ es, sin embargo, $-3/2$).

    (d) En ambos casos el límite es $6/5$.

    (e) No existe en ninguno de los dos puntos: en ambos casos los límites por la izquierda y por la derecha son 0 e ∞, respectivamente.

    (f) No existen: el límite es ∞ cuando $x \to \infty$, y es $-\infty$ cuando $x \to -\infty$.

    (g) No existen: el límite es ∞ cuando $x \to \infty$, y es $-\infty$ cuando $x \to -\infty$.

    (h) $1/2$. (i) 1.

    (j) No existen: el límite es ∞ cuando $x \to \infty$, y es $-\infty$ cuando $x \to -\infty$.

    (k) En ambos casos el límite es 0. (l) No existe: el límite es ∞.

    (m) En ambos casos el límite es $-5/7$. (n) 12 (ñ) 6.

    (o) No existen: el límite es ∞ cuando $x \to \infty$, y es $-\infty$ cuando $x \to -\infty$.

    (p) 0. (q) No existen: en ambos casos el límite es ∞.

14. (a) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$. $\operatorname{Dom} g = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$. $\operatorname{Dom} h = \mathbb{R} - \{0\}$.

    (b) Las funciones f, g y h son continuas en sus respectivos dominios.

    La función f presenta una discontinuidad esencial (de salto infinito) en el punto $x = -1$, y una discontinuidad evitable en el punto $x = 1$.

    La función g presenta una discontinuidad esencial (de salto infinito) en el punto $x = -3$, y una discontinuidad evitable en el punto $x = 3$.

    La función h presenta una discontinuidad esencial (de salto infinito) en el punto $x = 0$.

    (c) Si $x \to \infty$, entonces f tiende a 1, g tiende a ∞ y h tiende a 0.

    Si $x \to -\infty$, entonces f tiende a 1, g tiende a $-\infty$ y h tiende a 0.

15. (a) $\dfrac{a-b}{c-d}$. (b) a. (c) $\dfrac{1}{2}$. (d) 0. (e) 1. (f) 1.

16. $b + 2a = 2$.

17. No es posible, pues el límite no existe porque f oscila (tomando valores comprendidos entre -1 y 1) cuando $x \to 0$.

18. Habrá que definir $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

19. Para a basta tomar las trayectorias $x = 1$ e $y = 1$.

    Para b las trayectorias $x = -2$ e $y = 0$.

    Para c las trayectorias $y = 0$ e $y = x - 1$ (o, en general, $y = m(x-1)$).

    Para d las trayectorias $y = 0$ e $y = x$.

20. No existe el límite de $a(x, y)$: es ∞.

    No existe el límite de $b(x, y)$: es ∞.

    El límite de $c(x, y)$ es $1/3$.

    No existe el límite de $d(x, y)$: es ∞.

    No existe el límite de $e(x, y, z)$ en los puntos indicados.

21. No existe ninguno de ellos. Para probar esto basta tomar, respectivamente, las trayectorias siguientes:

    (a) $y = x$ e $y = 2x$. (b) $y = 0$ e $y = x - 1$ (o, en general, $y = m(x-1)$).

    (c) $y = 2$ e $y = x + 2$. (d) $y = x$ e $y = 2x$ (o, en general, $y = mx, m > 0$).

22. Basta aplicar el teorema de Bolzano a $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1} + \dfrac{x-1}{x-3}$, por ejemplo en el intervalo $[0, 5/2]$.

23. Basta aplicar el teorema de Bolzano a $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{3}{x-3}$, por ejemplo en los intervalos $[6/5, 7/5]$ y $[12/5, 13/5]$.

24. Basta aplicar el teorema de Bolzano a $f(x) = x^{3422} + \dfrac{524}{17 + 3x^2 + \cos^2 x} - 420$, por ejemplo en el intervalo $[1, 2]$.

27. $[1, 2]$.

29. $-0{,}59375$ (aplicando el método de bisección 5 veces a partir del intervalo $[-1, 0]$).

30. $1{,}3642578125$ (aplicando el método de bisección 10 veces a partir del intervalo $[1, 2]$).

Capítulo 4

Sección 4.1.6

1. $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

2. $a'(x) = \left(\sqrt{x}\right)^{\cos 2x} \left(\dfrac{\cos 2x}{2x} - (\operatorname{sen} 2x)(\ln x) \right);$

   $b'(x) = 9\,(\operatorname{sen} 3x)^{3\cos 3x} \left(\dfrac{\cos^2 3x}{\operatorname{sen} 3x} - (\operatorname{sen} 3x)\ln(\operatorname{sen} 3x) \right);$

   $c'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad d'(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{\ln x} \left(\dfrac{1}{x} \ln \dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{2\ln x}{x^2-1} \right).$

3. $D_{(v_1,v_2)} f(1,2) = (\cos 6 - 4\cos 1)v_1 - (3\operatorname{sen} 6 + 4\operatorname{sen} 1)v_2.$

4. $D_{\frac{(-2,-4,0)}{\|(-2,-4,0)\|}} f(0,0,1) = 0.$

5. $a_{xx} = a_{yy} = \left[2 + 8(x-y)^2 \operatorname{tg}\left((x-y)^2 - 3\right)\right] \cdot \left[1 + \operatorname{tg}^2\left((x-y)^2 - 3\right)\right];$

   $a_{xy} = a_{yx} = -a_{xx};$

   $b_{xx} = -\operatorname{sen}(x + z^y); \qquad b_{yy} = z^y(\ln^2 z)\left(\cos(x+z^y) - z^y \operatorname{sen}(x+z^y)\right);$

   $b_{zz} = y(y-1)z^{y-2}\cos(x+z^y) - y^2 z^{2y-2} \operatorname{sen}(x+z^y);$

   $b_{xy} = b_{yx} = -z^y(\ln z)\operatorname{sen}(x+z^y); \qquad b_{xz} = b_{zx} = -yz^{y-1}\operatorname{sen}(x+z^y);$

   $b_{yz} = b_{zy} = z^{y-1}(1 + y\ln z)\cos(x+z^y) - yz^{2y-1}(\ln z)\operatorname{sen}(x+z^y).$

6. $\nabla a(x,y,z) = \left(\dfrac{1}{1+x+y^2+z^3}, \dfrac{2y}{1+x+y^2+z^3}, \dfrac{3z^2}{1+x+y^2+z^3} \right);$

   $\nabla b(x,y,z) = \left(\dfrac{2y}{(x+y)^2}, \dfrac{-2x}{(x+y)^2}, 0 \right).$

7. $\dfrac{\partial a}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)}{f(x,y,z)}; \quad \dfrac{\partial a}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)}{f(x,y,z)}; \quad \dfrac{\partial a}{\partial z}(x,y,z) = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)}{f(x,y,z)};$

   $\dfrac{\partial b}{\partial x}(x,y,z) =$

   $= [1 + \operatorname{tg}^2 f(x^2, \operatorname{sen} y, z-x)] \cdot \left[2x \dfrac{\partial f}{\partial x}(x^2, \operatorname{sen} y, z-x) - \dfrac{\partial f}{\partial z}(x^2, \operatorname{sen} y, z-x) \right];$

   $\dfrac{\partial b}{\partial y}(x,y,z) = \left[1 + \operatorname{tg}^2 f(x^2, \operatorname{sen} y, z-x)\right] (\cos y) \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(x^2, \operatorname{sen} y, z-x\right);$

   $\dfrac{\partial b}{\partial z}(x,y,z) = \left[1 + \operatorname{tg}^2 f(x^2, \operatorname{sen} y, z-x)\right] \dfrac{\partial f}{\partial z}\left(x^2, \operatorname{sen} y, z-x\right);$

   $c'(x) = 3f^2(x, \operatorname{sen} x, \ln x) \cdot$

   $\cdot \left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \operatorname{sen} x, \ln x) + (\cos x)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \operatorname{sen} x, \ln x) + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial f}{\partial z}(x, \operatorname{sen} x, \ln x) \right].$

8. (a) $y' = \dfrac{1 - 3x^2y^3}{3x^3y^2 - 1};$

$$y'' = \frac{6xy^3 + 18x^2y^2y' + 6x^3y(y')^2}{1 - 3x^3y^2} \quad \text{(y queda sustituir } y' \text{ por su valor).}$$

(b) $y' = \dfrac{1}{x \operatorname{tg} y} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; $\quad y'' = \dfrac{-1}{x^2 \operatorname{tg} y}\left(2 + \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 y}\right) = \dfrac{-x}{x^2-1}$.

(c) $y' = \dfrac{3x^2}{6y^2-4}$; $\quad y'' = \dfrac{3x - 6y(y')^2}{3y^2-2} = \dfrac{6x - 27x^4y}{2(3y^2-2)}$.

9. (a) $z_x(x,y) = \dfrac{-(y+z)}{x+y-e^z}$; $\quad z_y(x,y) = \dfrac{-(x+z)}{x+y-e^z}$;

$$z_{xx}(x,y) = \frac{(e^z - x - y)z_x + (y+z)(1 - z_x e^z)}{(x+y-e^z)^2} = \frac{(y+z)[e^z(2-y-z) - 2(x+y)]}{(x+y-e^z)^3};$$

$$z_{xy}(x,y) = \frac{-(1+z_y)(x+y-e^z) + (y+z)(1-z_y e^z)}{\left(x+y-e^z\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\left(x+y-e^z\right)^3}\left[e^{2z} + ze^z(2-x-y-z) - e^z(x+y+xy) - 2(x+y)z\right];$$

$$z_{yx}(x,y) = \frac{-(1+z_x)(x+y-e^z) + (x+z)(1-z_x e^z)}{\left(x+y-e^z\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\left(x+y-e^z\right)^3}\left[e^{2z} + ze^z(2-x-y-z) - e^z(x+y+xy) - 2(x+y)z\right];$$

$$z_{yy}(x,y) = \frac{(e^z - x - y)z_y + (x+z)(1 - z_y e^z)}{(x+y-e^z)^2} = \frac{(x+z)[e^z(x+z-2) + 2(x+y)]}{(x+y-e^z)^3}.$$

(b) $z_x(x,y) = \dfrac{e^x \cos(y+z)}{1 + e^x \operatorname{sen}(y+z)}$; $\quad z_y(x,y) = \dfrac{-e^x \operatorname{sen}(y+z)}{1 + e^x \operatorname{sen}(y+z)}$;

$z_{xx}(x,y) = \dfrac{e^x(1-e^{2x})\cos(y+z)}{\left(1 + e^x \operatorname{sen}(y+z)\right)^3}$; $\quad z_{yy}(x,y) = \dfrac{-e^x \cos(y+z)}{\left(1 + e^x \operatorname{sen}(y+z)\right)^3}$;

$z_{xy}(x,y) = z_{yx}(x,y) = \dfrac{-e^x(e^x + \operatorname{sen}(y+z))}{\left(1 + e^x \operatorname{sen}(y+z)\right)^3}$.

Sección 4.2.4

1. No se puede aplicar el teorema de Rolle puesto que la función no es continua en el intervalo propuesto.

2. (a) 3 soluciones como máximo. (b) Como máximo puede tener una solución.

3. Se resuelve aplicando el teorema del valor medio a la función $f(t) = \cos t$ en el intervalo $[y, x]$, y tomando posteriormente valores absolutos.

4. (a) Para todo $a \in (0, \infty)$ el resultado es $1/\sqrt{2a}$; para $a = 0$ el límite es ∞.
   (b) α/β. (c) -1. (d) ∞.

5. Para que f sea continua en 0 se tendrá que asignar $f(0) = 1/2$; de esta forma f será derivable en 0 pues existe el límite de su derivada en 0, y $f'(0) = 0$.

6. La función f es continua en $\mathbb{R}-\{1,2\}$. En el punto 1 la discontinuidad es de salto, y en el punto 2 la discontinuidad es esencial (de salto infinito). La función f es derivable en $\mathbb{R}-\{0,1,2\}$, siendo su expresión

$$f'(x)=\begin{cases}\cos\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\operatorname{sen}\frac{1}{x} & \text{si } x<0,\\ 1 & \text{si } 0<x<1,\\ (x-2)^{-2} & \text{si } 1<x<2,\\ 2x+1 & \text{si } x>2.\end{cases}$$

En los puntos 0 y 2 las discontinuidades de f' son esenciales (oscilante en el primer caso, de salto infinito en el segundo), y en el punto 1 la discontinuidad es evitable.

7. $g(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(c+1)^{n+1}}$, con $0<c<x$ ó $x<c<0$.

Sección 4.3.4

1. f tiene un máximo tanto local como global en $-4/3$ y un mínimo global en 2;

   h presenta máximos locales en $-\sqrt{1/3}$ y $\sqrt{1/3}$, mínimos locales en 0 y 1, máximo global en 2, y mínimos globales en $0,1$ y -1;

   j no tiene extremos locales en $[-1/2,1]$, aunque sí un mínimo global en 1 y un máximo global en $-1/2$; en $[-1,1]$ no tiene extremos, ni locales ni globales.

2. Se resuelve aplicando el teorema del valor medio a la función $f(t)=e^t$ en el intervalo $[0,x]$, y utilizando el hecho de que la función exponencial es creciente. Otro modo más sencillo: estudiando la monotonía de las funciones $r(x)=e^x-x-1$ y $s(x)=1+xe^x-e^x$.

3. (a) No podemos asegurarlo pues no conocemos la monotonía de g. (b) No podemos asegurarlo pues no conocemos la expresión de g. (c) Por ser g continua en un intervalo cerrado se puede asegurar que tiene un máximo global y un mínimo global, aunque puede tener más entre locales y globales.

4. $x=0,567143$.

5. f es convexa en $(-\infty,-\sqrt[3]{2})\cup(1,\infty)$ y cóncava en $(-\sqrt[3]{2},+1)$. El único punto de inflexión es $-\sqrt[3]{2}$.

Sección 4.4

1. Bastará con comprobar que sólo existe un punto de corte entre las funciones $y=1/x$ e $y-1/a=-(1/a^2)(x-a)$.

2. Una vez dibujada la gráfica de f en toda la recta real será fácil ver que la función no es derivable en los puntos del conjunto $\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$, por lo tanto no será derivable en los puntos 0 y π del intervalo $[-\pi,2\pi]$ (en $-\pi$ y 2π sí es derivable al estar definida la función sólo a un lado de esos puntos).

3. (a) $f'(x)=1/(2\sqrt{x})$; (b) $f'(x)=-1/x^2$; (c) $f'(x)=2x+2$.

4. (a) $f'(x) = g'(x + g(a))$; (b) $f'(x) = g(a)g'(xg(a))$;
(c) $f'(x) = (1 + g'(x))g'(x + g(x))$; (d) $f'(x) = g'(x)(x - a) + g(x)$;
(e) $f'(x) = g(a)$; (f) $f'(x) = g'(x^2 + x)(2x + 1)$.

5. $a'(x) = \dfrac{x(1 + \mathrm{tg}^2(x^2 + 1))}{\mathrm{tg}(x^2 + 1)\sqrt{\ln(\mathrm{tg}(x^2 + 1))}} = \dfrac{2x}{\mathrm{sen}(2x^2 + 2)\sqrt{\ln(\mathrm{tg}(x^2 + 1))}}$;

$$b'(x) = \frac{2 - 4x^2}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - 4x^2 + 4x^4)}} = \begin{cases} \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in (-1, \frac{-1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1), \\ \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in [\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]. \end{cases}$$

$c'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - \cos x$; $d'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} = \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{x^2 - 1}}$;

$e'(x) = \dfrac{1}{x+1}$; $f'(x) = \dfrac{1}{\cos x}$;

$g'(x) = \dfrac{1}{2 + 2x^2}$; $h'(x) = 2 \,\mathrm{sen}\, x \cos x = \mathrm{sen}\, 2x$.

6. $f'(x) = |2x|$. El producto de dos funciones puede ser derivable en un punto aun cuando una de ellas no lo sea en dicho punto. Pero este resultado no es general. Por ejemplo, $r(x) = 2$ es derivable en $x = 0$, $g(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$ y $(rg)(x) = 2\,|x|$ tampoco lo es.

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x > 0, \\ -2 & \text{si } x < 0; \end{cases} \qquad f^{(n)}(x) = 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R} - \{0\},\ n \geq 3.$$

7. $a_x(x, y) = 4x^3 - 4y$; $a_y(x, y) = 4y^3 - 4x$;

$b_x(x, y) = y\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)$; $b_y(x, y) = x + \dfrac{1}{x}$;

$c_x(x, y) = \mathrm{sen}(x + y) + x\cos(x + y)$; $c_y(x, y) = x\cos(x + y)$;

$d_x(x, y) = yx^{y-1}$; $d_y(x, y) = x^y \ln x$;

$e_x(x, y) = \dfrac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$; $e_y(x, y) = \dfrac{-xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$;

$f_x(x, y) = \dfrac{-2x \,\mathrm{sen}\, x^2}{y}$; $f_y(x, y) = \dfrac{-\cos x^2}{y^2}$.

8. $c_x(x, y) = \dfrac{x^2 + 4xy + y^2}{(x + 2y)^2}$; $c_y(x, y) = \dfrac{-2(x^2 + xy + y^2)}{(x + 2y)^2}$; $c_{xx}(x, y) = \dfrac{6y^2}{(x + 2y)^3}$;

$c_{yy}(x, y) = \dfrac{6x^2}{(x + 2y)^3}$; $c_{xy}(x, y) = c_{yx}(x, y) = \dfrac{-6xy}{(x + 2y)^3}$;

$d_x(x, y) = 2xyg'(x^2y + y^2)$; $d_y(x, y) = (x^2 + 2y)g'(x^2y + y^2)$;

$d_{xx}(x, y) = 2yg'(x^2y + y^2) + (2xy)^2 g''(x^2y + y^2)$;

$d_{yy}(x, y) = 2g'(x^2y + y^2) + (x^2 + 2y)^2 g''(x^2y + y^2)$;

$d_{xy}(x, y) = d_{yx}(x, y) = 2xg'(x^2y + y^2) + 2xy(x^2 + 2y)g''(x^2y + y^2)$;

$e_x(x, y, z) = (\ln y)g'(x \ln y + z^2)$; $e_y(x, y, z) = \dfrac{x}{y} g'(x \ln y + z^2)$;

$e_z(x, y, z) = 2zg'(x \ln y + z^2)$;

$$e_{xx}(x,y,z) = (\ln y)^2 g''(x\ln y + z^2);$$
$$e_{yy}(x,y,z) = \frac{-x}{y^2} g'(x\ln y + z^2) + \frac{x^2}{y^2} g''(x\ln y + z^2);$$
$$e_{zz}(x,y,z) = 2g'(x\ln y + z^2) + 4z^2 g''(x\ln y + z^2);$$
$$e_{xy}(x,y,z) = e_{yx}(x,y,z) = \frac{1}{y} g'(x\ln y + z^2) + \frac{x\ln y}{y} g''(x\ln y + z^2);$$
$$e_{xz}(x,y,z) = e_{zx}(x,y,z) = 2z\ln y g''(x\ln y + z^2);$$
$$e_{yz}(x,y,z) = e_{zy}(x,y,z) = \frac{2zx}{y} g''(x\ln y + z^2).$$

9. (a) $\nabla u(x,y,z) = \left(\frac{(\operatorname{sen} x)(\cos x)}{u(x,y,z)}, \frac{(\operatorname{sen} y)(\cos y)}{u(x,y,z)}, \frac{(\operatorname{sen} z)(\cos z)}{u(x,y,z)}\right);$

   (b) $\nabla u(x,y,z) = \left(\frac{1}{x+y}, \frac{1}{x+y}, 0\right).$

10. $f_x(x,y) = 2x \operatorname{tg}\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}\left(1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)\right);$

    $f_y(x,y) = \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}\left(1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)\right).$

    Efectivamente, la relación $xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = 2f(x,y)$ es cierta para cualquier $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

11. $D_v f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{v_1}{hv_2} = \pm\infty$, si $v_1v_2 \neq 0$.

12. $a'(t) = \left(\frac{1}{2t^{1/2}}, \frac{1}{2\,(t+2)^{1/2}}\right); \qquad b'(t) = \left(1, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \frac{1}{1+t^2}\right);$

    $c'(t) = \left(\frac{-1}{t^2}, \frac{-2}{t^3}, \frac{-2t}{(t^2-4)^2}\right); \qquad e'(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}, \frac{1}{t}, \frac{-1}{(t-1)^2}\right);$

    $d'(t) = \left(\frac{\ln|t+1| - t/\,(t+1)}{\ln^2|t+1|}, \frac{t\cos t - \operatorname{sen} t}{t^2}, 1\right),\ t \neq 0,-1,-2; \quad d'(0) = \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right);$

    $f_x(x,y) = \left(\frac{1}{y}, \ln y, \frac{1}{2\sqrt{x}}\right); \qquad f_y(x,y) = \left(\frac{-x}{y^2}, \frac{x}{y}, 1\right);$

    $g_x(x,y,z) = \left(yz\cos(xyz), \frac{ye^{xy}}{z}, \frac{1}{x-y}\right);$

    $g_y(x,y,z) = \left(xz\cos(xyz), \frac{xe^{xy}}{z}, \frac{1}{y-x}\right);$

    $g_z(x,y,z) = \left(xy\cos(xyz), \frac{-e^{xy}}{z^2}, 0\right);$

    $h_x(x,y) = (0,y,1); \qquad h_y(x,y) = (0,x,2).$

13. Para obtener el resultado han de hacerse los siguientes cálculos:

    $\alpha'(t) = (1-2t)\,c(t) + \left(t - t^2\right) c'(t); \qquad \beta'(t) = b'(t)\cdot c(t) + b(t)\cdot c'(t);$

    $\gamma'(t) = b'(t)\times c(t) + b(t)\times c'(t);$

    $\delta_x(x,y) = f_x(x,y)\cdot h(x,y) + f(x,y)\cdot h_x(x,y);$

$\delta_y(x,y) = f_y(x,y)\cdot h(x,y) + f(x,y)\cdot h_y(x,y);$
$\varphi_x(x,y,z) = g(x,y,z) + (x-yz)\, g_x(x,y,z);$
$\varphi_y(x,y,z) = -zg(x,y,z) + (x-yz)\, g_y(x,y,z);$
$\varphi_z(x,y,z) = -yg(x,y,z) + (x-yz)\, g_z(x,y,z).$

Los resultados para las tres primeras derivadas son:

$$\alpha'(t) = \left(-1, \frac{-1}{t^2}, \frac{-t^2+8t-4}{(t^2-4)^2}\right);$$

$$\beta'(t) = \frac{1}{t^2\sqrt{1-t^2}} - \frac{2\operatorname{arc\,sen} t}{t^3} + \frac{1}{(t^2+1)\,(t^2-4)} - \frac{2t\operatorname{arc\,tg} t}{(t^2-4)^2};$$

$$\gamma'(t) = \left(\frac{2\operatorname{arc\,tg} t}{t^3} - \frac{2t\operatorname{arc\,sen} t}{(t^2-4)^2} + \frac{1}{(t^2-4)\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{t^2\,(t^2+1)},\right.$$
$$\left.\frac{t^2+4}{(t^2-4)^2} + \frac{1}{t\,(t^2+1)} - \frac{\operatorname{arc\,tg} t}{t^2}, \frac{-1+\operatorname{arc\,sen} t}{t^2} - \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}}\right).$$

14. Para simplificar la expresión de las soluciones, en las cuatro primeras funciones denotaremos:

$A = (x^2-2xy, y^2-3);\qquad B = (\operatorname{sen}(x+2y), xy-x^2);$
$C = (x^2-y^2, x+2y+3z);\qquad D = (x^2+x+1, 2x-1);$

Los resultados del ejercicio son los siguientes:

$$\frac{\partial a}{\partial x}(x,y) = (2x-2y)\frac{\partial g}{\partial x}(A);\qquad \frac{\partial a}{\partial y}(x,y) = -2x\frac{\partial g}{\partial x}(A) + 2y\frac{\partial g}{\partial y}(A);$$

$$\frac{\partial b}{\partial x}(x,y) = \cos(x+2y)\frac{\partial g}{\partial x}(B) + (y-2x)\,\frac{\partial g}{\partial y}(B);$$

$$\frac{\partial b}{\partial y}(x,y) = 2\cos(x+2y)\frac{\partial g}{\partial x}(B) + x\frac{\partial g}{\partial y}(B);$$

$$\frac{\partial c}{\partial x}(x,y,z) = 2x\frac{\partial g}{\partial x}(C) + \frac{\partial g}{\partial y}(C);\qquad \frac{\partial c}{\partial y}(x,y,z) = -2y\frac{\partial g}{\partial x}(C) + 2\frac{\partial g}{\partial y}(C);$$

$$\frac{\partial c}{\partial z}(x,y,z) = 3\frac{\partial g}{\partial z}(C);$$

$$d'(x) = (2x+1)\,\frac{\partial g}{\partial x}(D) + 2\frac{\partial g}{\partial y}(D);$$

$$\frac{\partial e}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{(g(x,y)+h(x,y))^2}\left[\left(g^2(x,y)+2g(x,y)h(x,y)-h^2(x,y)\right)\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + \right.$$
$$\left. + \left(h^2(x,y)+2g(x,y)h(x,y)-g^2(x,y)\right)\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\right];$$

$$\frac{\partial e}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{(g(x,y)+h(x,y))^2}\left[\left(g^2(x,y)+2g(x,y)h(x,y)-h^2(x,y)\right)\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) + \right.$$
$$\left. + \left(h^2(x,y)+2g(x,y)h(x,y)-g^2(x,y)\right)\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right];$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (\operatorname{sen} g(x,y))\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) + h(x,y)(\cos g(x,y))\frac{\partial g}{\partial x}(x,y);$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (\operatorname{sen} g(x,y))\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) + h(x,y)(\cos g(x,y))\frac{\partial g}{\partial y}(x,y).$$

15. Para simplificar la expresión de las soluciones denotaremos:

$A = (x^2 - y, \operatorname{sen} y^2 - z, xyz^2)$; $\qquad B = (y \operatorname{sen} x, y \cos x, y)$;

$C = (x + y, x + z, y + z)$; $\qquad D = (\operatorname{sen} x, x, \ln x)$.

Los resultados del ejercicio son los siguientes:

$\dfrac{\partial a}{\partial x}(x,y,z) = 2x\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) + yz^2\dfrac{\partial f}{\partial z}(A)$;

$\dfrac{\partial a}{\partial y}(x,y,z) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) + 2y(\cos y^2)\dfrac{\partial f}{\partial y}(A) + xz^2\dfrac{\partial f}{\partial z}(A)$;

$\dfrac{\partial a}{\partial z}(x,y,z) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(A) + 2xyz\dfrac{\partial f}{\partial z}(A)$;

$\dfrac{\partial b}{\partial x}(x,y) = y(\cos x)\dfrac{\partial f}{\partial x}(B) - y(\operatorname{sen} x)\dfrac{\partial f}{\partial y}(B)$;

$\dfrac{\partial b}{\partial y}(x,y) = (\operatorname{sen} x)\dfrac{\partial f}{\partial x}(B) + (\cos x)\dfrac{\partial f}{\partial y}(B) + \dfrac{\partial f}{\partial z}(B)$;

$\dfrac{\partial c}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(C) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(C)$; $\qquad \dfrac{\partial c}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(C) + \dfrac{\partial f}{\partial z}(C)$;

$\dfrac{\partial c}{\partial z}(x,y,z) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(C) + \dfrac{\partial f}{\partial z}(C)$;

$d'(x) = (\cos x)\dfrac{\partial f}{\partial x}(D) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(D) + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial f}{\partial z}(D)$.

16. (a) $y' = -x/y$; $\qquad y'' = -(x^2 + y^2)/y^3 = -16/y^3$.

(b) $y' = \dfrac{\cos x - (1 + \operatorname{tg} y)}{x\,(1 + \operatorname{tg}^2 y)}$;

$$y'' = \frac{-\operatorname{sen} x - 2\,(1 + \operatorname{tg}^2 y)\left(y' + x\,(y')^2 \operatorname{tg} y\right)}{x\,(1 + \operatorname{tg}^2 y)} \quad \text{(y se sustituye } y' \text{ por su valor).}$$

(c) $y' = \dfrac{2x^3 + xy^2}{y - x^2 y}$;

$$y'' = \frac{4xyy' + 6x^2 + y^2 - (y')^2\,(1 - x^2)}{y\,(1 - x^2)} = \frac{(1 + 2x^2)y^4 + (6x^2 - 2x^4)y^2 - 4x^6}{(1 - x^2)^2 y^3}.$$

(d) $y' = \dfrac{(x + y)\,y \cos xy - 1}{1 - (x + y)\,x \cos xy}$; $\qquad y''$ tiene una expresión complicada.

(e) $y' = \dfrac{-y^2 - 24x^2 - 3y}{2xy + 3x}$;

$$y'' = \frac{-y'\,(4y + 6) - 48x - 2x\,(y')^2}{2xy + 3x} \quad \text{(y se sustituye } y' \text{ por su valor).}$$

(f) Similar al apartado (a).

(g) $y' = \dfrac{e^x \cos y}{1 + e^x \operatorname{sen} y}$; $\qquad y'' = \dfrac{(e^x - e^{3x}) \cos y}{(1 + e^x \operatorname{sen} y)^3}$.

(h) $y' = -\operatorname{tg} y$; $\qquad y'' = \operatorname{tg} y \left(1 + \operatorname{tg}^2 y\right)$.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ del apartado (a) en el punto $(3, \sqrt{7})$ es $g(x) = \frac{-3}{\sqrt{7}}(x - 3) + \sqrt{7}$.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ del apartado (c) en el punto $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ es $g(x) = 3(x - \frac{1}{\sqrt{2}}) + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

17. (a) $z_x = \dfrac{24x^2 - 3y - z^2}{2(x+y^2)z}$; $\quad z_y = \dfrac{-3x - 2yz^2}{(2x+2y^2)z}$; $\qquad z_{xx} = \dfrac{24x - z_x(2z + (x+y^2)z_x)}{(x+y^2)z}$;

$$z_{yy} = \frac{-z^2 - z_y(4yz + (x+y^2)z_y)}{(x+y^2)z}; \qquad z_{xy} = \frac{-3 - 2zz_y - 4yzz_x - 2(x+y^2)z_x z_y}{2(x+y^2)z}$$

(en las tres derivadas segundas hay que sustituir las derivadas primeras).

(b) $z_x = -x/z$; $\qquad z_y = -y/z$;

$$z_{xx} = \frac{-x^2 - z^2}{z^3}; \qquad z_{yy} = \frac{-y^2 - z^2}{z^3}; \qquad z_{xy} = z_{yx} = \frac{-xy}{z^3}.$$

(c) $z_x = -\operatorname{tg}(y+z)$; $\qquad z_y = -1$;

$$z_{xx} = \operatorname{tg}(y+z)\left(1 + \operatorname{tg}^2(y+z)\right); \qquad z_{yy} = z_{xy} = z_{yx} = 0.$$

18. $c = \dfrac{-2 - \sqrt{19}}{3}$.

19. No se contradice el teorema de Rolle, pues la función no es derivable en el punto $-3/2 \in (-1, -2)$. Por tanto, no puede aplicarse dicho teorema.

20. (a) 2 soluciones como máximo. (b) 2 soluciones como máximo.

21. Hay dos soluciones posibles: $c_1 = \sqrt{1 - \dfrac{4}{\pi^2}}$ y $c_2 = -\sqrt{1 - \dfrac{4}{\pi^2}}$.

22. Se prueba considerando la función $f(t) = \operatorname{sen} t$ en el intervalo $[y, x]$.

23. $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{2}$; $\qquad \displaystyle \nexists \lim_{x\to -\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x}$; $\qquad \displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$;

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{\ln x} = -\infty; \qquad \lim_{x\to 0} x^x = 1; \qquad \nexists \lim_{x\to 0} xe^{1/x}; \qquad \lim_{x\to 1} (x-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = \frac{-2}{\pi};$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{x + \ln x} = \infty; \qquad \lim_{x\to 1} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x-1} = 1; \qquad \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x \operatorname{sen} x} = 1.$$

24. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} xy}{xy} = 1$, $\qquad \displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{(\ln y)(\operatorname{tg} x)}{x(y-1)} = 1$.

25. La función f es continua en $\mathbb{R} - \{-2\}$. En el punto $x = -2$ la discontinuidad es de salto.

26. $a(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$; $b(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ (con discontinuidad esencial en el punto $x = 0$) y derivable en $\mathbb{R} - \{0, 1\}$; $c(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$; $d(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$. Las funciones derivadas que pide el ejercicio son las siguientes:

$$a'(x) = 2\,|x|,\ \forall x \in \mathbb{R}; \qquad b'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0, \\ -1/x^2 & \text{si } 0 < x < 1, \\ 3x^2 - 2 & \text{si } x > 1; \end{cases}$$

$$c'(x) = \begin{cases} 3x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0; \end{cases}$$

$$c''(x) = \left(6x - \frac{1}{x}\right) \operatorname{sen} \frac{1}{x} - 4 \cos \frac{1}{x}, \text{ si } x \neq 0, \text{ pero } \nexists c''(0);$$

$$d'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0; \end{cases} \qquad d''(x) = \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right) e^{-1/x^2},\ \forall x > 0.$$

27. $\operatorname{Dom} f = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, -1 \le x|x| - \frac{1}{2} \le 1\right\} = \left[-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$.

La función es derivable en $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, y su expresión es

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x}{\sqrt{1-\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2}} & \text{si } -\sqrt{\dfrac{1}{2}} < x < 0, \\ \dfrac{2x}{\sqrt{1-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}} & \text{si } 0 \le x < \sqrt{\dfrac{3}{2}}. \end{cases}$$

28. La función f es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$. En el punto -1 la discontinuidad es esencial. La función f es derivable en $\mathbb{R} - \{1, -1\}$, y su expresión es

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(x+1)^2} & \text{si } x < -1, \\ \dfrac{-2}{(x+1)^2} & \text{si } -1 < x < 1, \\ \dfrac{2}{(x+1)^2} & \text{si } 1 < x. \end{cases}$$

La función f' es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{1, -1\}$. f' tiene una discontinuidad esencial en el punto -1 y de salto en el punto 1. Las discontinuidades de f'' coinciden con las de f'.

29. La función f es continua en $\mathbb{R}$, y derivable en $\mathbb{R} - \{1, -1\}$, su expresión es

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{4x}{(x^2+1)^2} & \text{si } x < -1, \\ \dfrac{-4x}{(x^2+1)^2} & \text{si } -1 < x < 1, \\ \dfrac{4x}{(x^2+1)^2} & \text{si } 1 < x. \end{cases}$$

La función f' es continua en $\mathbb{R} - \{1, -1\}$. f' tiene en los puntos 1 y -1 discontinuidades de salto.

30. La función f es continua en $[-1, 1) \cup (1, 3]$. Para que sea continua en $[-1, 3]$ se tendrá que definir $f(1) = 4/9$, que es el límite de la función en el punto 1.

31. La función f es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$. Para que sea continua en $\mathbb{R}$ se tendrá que definir $f(0) = 0$, que es el límite de la función en el punto 0.

32. $l(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4 e^{\operatorname{sen} c}}{4!}\left(\operatorname{sen}^4 c + 6\operatorname{sen}^3 c + 5\operatorname{sen}^2 c - 5\operatorname{sen} c - 3\right)$, con $0 < c < x$ ó $x < c < 0$.

33. (a) $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}$, con $0 < c < x$ ó $x < c < 0$.

(b) $h(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}(x-1)^k}{k} + \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{(n+1)\, c^{n+1}}$, con $1 < c < x$ ó $x < c < 1$.

(c) $k(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (x-1)^k + \frac{(-1)^{n+1}}{c^{n+2}}(x-1)^{n+1}$, con $1 < c < x$ ó $x < c < 1$.

34. La función a tiene un mínimo tanto local como global en 0 y un máximo global en $-1/2$.

    La función b no tiene extremos locales, tiene un mínimo global en -1 y un máximo global en 1.

    La función c en $\mathbb{R}$ tiene un mínimo tanto local como global en $-1-\sqrt{2}$ y un máximo tanto local como global en $-1+\sqrt{2}$; la función c en $[-2, 1/2]$ no tiene mínimo local, tiene un mínimo global en -2, y un máximo tanto local como global en $-1+\sqrt{2}$.

    La función d en $[0,1) \cup (1,5]$ no tiene extremos ni locales ni globales; la función d en $[2,4]$ no tiene extremos locales, tiene un máximo global en 2 y un mínimo global en 4.

    La función e en $\mathbb{R}$ no tiene extremos globales, tiene un mínimo local en 1 y un máximo local en -1; la función e en $[-3/2, 3]$ tiene un máximo global en 3, y un mínimo tanto local como global en 1.

    La función f en $\mathbb{R}$ no tiene mínimos, y presenta un máximo tanto global como local en 0; la función f en $[-1,2]$ presenta un máximo tanto global como local en 0, tiene un mínimo global en 2 y no tiene mínimos locales.

    La función g en $\mathbb{R}$ tiene dos mínimos tanto locales como globales, en 1 y en -1, y un máximo tanto local como global en 0; la función g en $[-2, \infty]$ presenta los mismos extremos que en $\mathbb{R}$; g la función en $(-1, 2]$ presenta un máximo tanto local como global en 0, un mínimo local en 1, y dos mínimos globales, en 1 y en -1.

    La función h en $\mathbb{R} - \{-1\}$ tiene un mínimo tanto local como global en 1 y no tiene máximos; la función h en $[1,4]$ no tiene extremos locales, tiene un mínimo global en 1, y un máximo global en 4.

    La función i no tiene extremos locales, presenta un máximo global en 2, y un mínimo global en -2.

    La función j no tiene extremos locales, no tiene máximo global, y presenta un mínimo global en 0.

    La función k no tiene máximos, presenta un mínimo global en 0, y un mínimo local en 1.

35. (a) La función estará acotada por su valor máximo y su valor mínimo, si los tiene (pero si no los tiene también podría ser acotada). Este apartado se responderá con los resultados del siguiente. (b) Máximo global en $\sqrt{2}$, mínimo global en -$\sqrt{2}$.

36. $a = -1/2$, $b = 3/2$, $c = d = 0$.

37. Solo se puede asegurar la afirmación (b).

38. Solo se puede asegurar la afirmación (c).

42. La capacidad máxima es de 0,5 m^3. El método empleado consiste en tener en cuenta las fórmulas del área y del volumen, y expresar esta última como función de una sola variable para posteriormente obtener su máximo global.

43. (a) La empresa debe producir semanalmente 2000 kg para obtener beneficios máximos (que serán de 1775255,13 euros).

    (b) La empresa sufrirá perdidas mayores en el caso de producir 30,33 kg, que supondría unas pérdidas de 42893,22 euros.

44. Las dimensiones en función del perímetro P son las siguientes: la base y el largo del rectángulo son respectivamente $4P/(8+3\pi)$ y $(4+\pi)P/(16+6\pi)$.

45. Hay un único cero, que se encuentra en el intervalo $(2,3)$.

50. La función a tiene tres ceros, uno en $(-2,-1)$, otro en $(0,1)$ y otro en $(1,2)$.

    La función b sólo tiene un cero y se encuentra en $(0,\pi/2)$.

    La función c tiene dos ceros y se encuentran en los intervalos $(0,1)$ y $(3,4)$.

    La función d tiene un cero en $x=0$, otro en el intervalo $(0,\pi/2)$ y otro en $(\pi,3\pi/2)$.

51. La ecuación sólo tiene una solución que se encuentra en el intervalo $(-1,0)$. La solución es $x \simeq -0{,}839286755$.

52. (a) La ecuación tiene una única solución. (b) La solución se encuentra en el intervalo $(-2,-1)$. La aproximación a la solución se obtiene tomando en primer lugar (por bisección) $x_1 = -1{,}5$, y las siguientes por el método de Newton-Raphson $x_2 = -1,52173$, $x_3 = -1,5213798$, $x_4 = -1,5213797068045$.

53. (a) $x = 0{,}34729635534$. (b) $x = 0{,}739085133$.

    (c) $x_1 = 0{,}15859433956$, $x_2 = 3{,}14619322062$.

    (d) $x_1 = 0$, $x_2 = 1{,}1655611852$, $x_3 = 4{,}6042167772$ (x_3 no se pide pero es interesante; se encuentra en el intervalo $(\pi, 2\pi)$).

54. Para las ocho primeras funciones, el estudio de la concavidad y convexidad se hará en el dominio más amplio posible.

    La función a es convexa en $(-\infty,1/3)\cup(1,\infty)$, cóncava en $(1/3,1)$, y sus puntos de inflexión son $1/3$ y 1.

    La función b es convexa en $(0,\infty)$, cóncava en $(-\infty,0)$, y su único punto de inflexión es 0.

    La función c es convexa en los intervalos $(-2-\sqrt{3},-2+\sqrt{3})$ y $(1,\infty)$ y cóncava en $(-\infty,-2-\sqrt{3})$ y $(-2+\sqrt{3},1)$; por tanto sus puntos de inflexión son tres: $-2-\sqrt{3}$, $-2+\sqrt{3}$ y 1.

    La función d es convexa en $(-1,0)\cup(1,\infty)$, cóncava en $(-\infty,-1)\cup(0,1)$, y su único punto de inflexión es 0.

    La función e es convexa en $(0,\infty)$, cóncava en $(-\infty,0)$, y su único punto de inflexión es 0.

    La función f es convexa en $(-\infty,-1/\sqrt{3})\cup(1/\sqrt{3},\infty)$, cóncava en $(-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$, y sus puntos de inflexión son $-1/\sqrt{3}$ y $1/\sqrt{3}$.

    La función g es convexa en los intervalos $(-1,-1/\sqrt{3})$ y $(1/\sqrt{3},1)$, y cóncava en $(-\infty,-1)$, $(-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$ y $(1,\infty)$, y sus puntos de inflexión son -1, $-1/\sqrt{3}$, $1/\sqrt{3}$ y 1.

    La función h es convexa en $(-\infty,-1)\cup(-1,1)$, cóncava en $(1,\infty)$, y su único punto de inflexión es 1.

    La función i es convexa en $(0,2)$, cóncava en $(-2,0)$, y su único punto de inflexión es 0.

    La función j es convexa en $(0,\infty)$, cóncava en $(-\infty,0)$, y no tiene puntos de inflexión.

    La función k es convexa en $(-3,0)\cup(0,1)\cup(1,2)$, en ningún intervalo es cóncava y, por tanto, no tiene puntos de inflexión.

Capítulo 5

Para ahorrar espacio, en los ejercicios de este capítulo en los que se pida obtener la integral indefinida de una función daremos como solución sólo una de sus primitivas (la integral indefinida se obtendría sumando una constante real a esa primitiva).

En muchos ejercicios llamaremos a sus distintos apartados (a), (b), (f), etc. cuando se refieran, respectivamente, a las funciones a, b, f, etc. de dicho ejercicio.

Sección 5.1.3

1. 744 euros.

2. 87,5 m.

3. Es posible ya que en 5 minutos podrían llenarse 14000 litros.

4. (a) $\ln^2 x$. (b) $-e^x(x+1)(x-3) = e^x(3+2x-x^2)$.

   (c) $\frac{2}{9}\sqrt{3x^3-8}$. (d) $\frac{1}{2}\left[3\ln(x^2+4) - 4\ln|x+3| - 5\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}\right]$.

   (e) $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2} + 3\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} - 3\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\right|$, o también $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{3\operatorname{sen}x - \cos x + 1}{\operatorname{sen}x + 3\cos x - 3}\right|$.

   (f) $\frac{1}{\ln 3}\left[\frac{1}{2}\ln(3^{-2x}+1) - 3^{-x} - \ln 3^{-x} + 2\operatorname{arc\,tg} 3^{-x}\right]$.

Sección 5.2.3

1. $\int_{-1}^{4}|f(x)|\,dx = -\int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx - \int_{2}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{4} f(x)\,dx$.

2. $\int_0^1[-2-(-5)]\,dx$. O bien, mediante $\int_0^1\int_{-5}^{-2} dy\,dx$.

Sección 5.3 (pág. 248)

1. (a) $\frac{2}{3}(4\sqrt{13}-1)$. (b) $\frac{1209}{28}$.

2. $\frac{61}{49} \simeq 1{,}24$ grados centígrados a las $13-\sqrt{37}$ horas (6:55:02).

3. $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$ y f tiene un máximo local en $x=-1$ y un mínimo local en $x=1$.

4. No existe el límite: la función tiende a $-\infty$ cuando $x\to 1^-$, y tiende a ∞ cuando $x \to 1^+$.

Sección 5.4.5

1. (a) -1 (observe que el dominio de integración es una región de tipo 2).

   (b) 0 (conviene realizar un cambio semejante al de coordenadas polares).

2. (a) $\dfrac{1}{6}$. (b) $\dfrac{\pi}{4}$ (conviene realizar un cambio a coordenadas cilíndricas).

   (c) $\dfrac{4\pi}{15}(316 - 67\sqrt{2})$ (conviene realizar un cambio a coordenadas esféricas).

Sección 5.5 (pág. 263)

1. (a) La demostración se basa en que: (i) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$; (ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} = \infty$ si $p < 1$; y (iii) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} = 0$ si $p > 1$. En este último caso $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\, dx = \frac{1}{p-1}$.

   (b) Aplicando el apartado (a) se obtiene que las tres integrales son convergentes y sus valores son $\frac{5}{21-5\sqrt{5}}$, $\frac{10}{43-10\sqrt{5}}$ y $\frac{1}{2}$.

2. La igualdad no es cierta, pues el integrando es una función no acotada en el intervalo $[0,3]$ y sus integrales en los intervalos $[0,2)$ y $(2,3]$ son divergentes hacia $-\infty$ y ∞, respectivamente.

Sección 5.6.3

1. En la primera integral con el método de los trapecios es necesario tomar, como mínimo, 164 intervalos; y con el método de Simpson, como mínimo, 9 intervalos (que equivale, al considerar los puntos medios, a tomar 18 intervalos o más). En la segunda integral con el método de los trapecios es necesario tomar, como mínimo, 184 intervalos; y con el método de Simpson, como mínimo, 11 intervalos (que equivale a tomar 22 o más intervalos).

2. $\dfrac{1235}{3} \simeq 411{,}67$ m^2.

3. Aplicando los métodos de los trapecios y de Simpson se obtiene, respectivamente,
   $\pi \simeq \dfrac{5323}{1700} \simeq 3{,}131176471$ y $\pi \simeq \dfrac{152916620159}{48674874300} \simeq 3{,}141592502$.
   Nota: recuerde que $\pi \simeq 3{,}141592654$.

Sección 5.7.4

1. La medida de dicho volumen es π.

2. La medida del área es $\dfrac{(5\sqrt{5}-1)\pi}{6}$.

3. El agua ejerce una fuerza de 98 newton sobre cada una de las dos paredes mayores y una fuerza de 58,8 newtons sobre cada una de las dos paredes menores.

4. La probabilidad pedida es $\dfrac{(e\sqrt{e}-1)^2}{e^3} \simeq 0{,}6$, es decir, el riesgo queda cubierto en aproximadamente un 60 % de los casos.

Sección 5.8

1. (a) $\dfrac{\ln(x^4+1)}{4}$. (b) $\dfrac{5}{24}(x^4+1)^{6/5}$. (c) $\dfrac{4}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{\sqrt{5}}$. (d) $\dfrac{-5}{4}\sqrt{1-4x^2}$.

(e) $\ln|\ln x|$. (f) $\dfrac{-3}{2(x-2)^2}$. (g) $\dfrac{\ln(x^2+16)}{2}$. (h) $\dfrac{x^{2/3}}{22}(20x^{13/30}+33)$.

(i) $\dfrac{(x+1)\sqrt{x+1}-(x-1)\sqrt{x-1}}{3}$. (j) $\operatorname{tg} x - x$. (k) $\dfrac{(4/3)^x}{2\ln 2-\ln 3}$. (l) $-\cos e^x$.

(m) $\dfrac{\operatorname{sen}^6 x}{6}$. (n) $\dfrac{-\ln^2\cos x}{2}$. (ñ) $\ln|3x^3-2x^2|$. (o) $\dfrac{2}{3}(\ln x)^{3/2}$.

2. (a) $(x-1)e^x$. (b) $\operatorname{sen} x - x\cos x$. (c) $-(3x^2-7x+6)e^x$.

(d) $\dfrac{(3-2x^2)\cos 2x+2x\operatorname{sen}2x}{4}$. (e) $x(\ln x-1)$. (f) $\dfrac{x^4(4\ln x-1)}{16}$.

(g) $\dfrac{2x\sqrt{x}(3\ln x-2)}{9}$. (h) $\dfrac{x^2(2\ln^2-2\ln x+1)}{4}$. (i) $\dfrac{\ln^2 x}{2}$.

(j) $x\operatorname{arc\,tg}x-\dfrac{\ln(x^2+1)}{2}$. (k) $\dfrac{e^x(\operatorname{sen}x-\cos x)}{2}$. (l) $\dfrac{e^{3x}(3\operatorname{sen}2x-2\cos 2x)}{13}$.

3. (a) $\ln(x^2+x+1)-\dfrac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$. (b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\dfrac{x+\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}-x}\right|$.

(c) $\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$. (d) $\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)^2}-\dfrac{2}{3(x-1)}-\dfrac{\sqrt{3}}{9}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

(e) $-\operatorname{arc\,tg}x+\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$. (f) $\dfrac{1}{5}\ln|x+2|-\dfrac{1}{10}\ln(x^2+1)+\dfrac{2}{5}\operatorname{arc\,tg}x$.

(g) $-\dfrac{5}{2}\ln|x-1|+\dfrac{5}{4}\ln(x^2+1)-\dfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x$. (h) $2\ln|x|-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$.

(i) $\dfrac{3}{5}\left(\ln\dfrac{(x-2)^2}{x^2+1}+\operatorname{arc\,tg}x\right)$.

(j) $\dfrac{1}{40}(10\ln|x|-5\ln|x+2|+3\ln|x-2|-4\ln(x^2+1)-16\operatorname{arc\,tg}x)$.

(k) $\dfrac{1}{3}\ln|x^3-1|$. (l) $x-\operatorname{arc\,tg}x$. (m) $2\ln|x-3|-\ln|x-2|$.

(n) $x-2\operatorname{arc\,tg}x$. (ñ) $\ln(x^2+x+1)-2\ln|x+1|$.

(o) $\dfrac{2\ln|x-1|-\ln(x^2+x+1)}{3}=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$. (p) $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|-\dfrac{x}{2(x-1)^2}$.

(q) $\ln|x|-2\ln|x-1|$. (r) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$. (s) $x+\dfrac{2}{x}+2\operatorname{arc\,tg}x$.

(t) $\dfrac{9x-10}{30(3x^2+5)}+\dfrac{\sqrt{3}}{10\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{3}{5}}\,x$. (u) $-\dfrac{3x^3+5x+2}{8(x^2+1)^2}-\dfrac{3}{8}\operatorname{arc\,tg}x$.

4. (a) $\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|$. (b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|$. (c) $\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right|$;

Nota: $\ln\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}}$ y $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|$ son otras dos soluciones de (c).

(d) $\operatorname{tg} x - \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$. (e) $\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} - x$.

(f) $\dfrac{2x}{5} + \dfrac{1}{5}\ln|2+\operatorname{tg} x| - \dfrac{1}{10}\ln(1+\operatorname{tg}^2 x)$, o también $\dfrac{2x + \ln|\operatorname{sen} x + 2\cos x|}{5}$.

(g) $\dfrac{3}{5}(2\ln|\operatorname{tg} x - 2| - \ln(1+\operatorname{tg}^2 x) + x)$.

(h) $\dfrac{-5}{2}\ln|\operatorname{tg} x - 1| + \dfrac{5}{4}\ln(1+\operatorname{tg}^2 x) - \dfrac{x}{2}$, o también $\dfrac{-5}{4}\ln(1-\operatorname{sen} 2x) - \dfrac{x}{2}$.

(i) $\dfrac{\cos^2 x}{2} - \ln|\cos x|$. (j) $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{sen} x)$. (k) $\cos x - 2\operatorname{arc\,tg}(\cos x)$.

(l) $\dfrac{\cos^3 x}{3} - \cos x$. (m) $\dfrac{1}{4}\cos 2x - \dfrac{1}{16}\cos 8x$. (n) $\dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x - \dfrac{1}{10}\operatorname{sen} 5x$.

(ñ) $\dfrac{1}{6}\operatorname{sen} 3x + \dfrac{1}{14}\operatorname{sen} 7x$. (o) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$.

(p) $\dfrac{1}{192}[12x + 3\operatorname{sen} 2x - 3\operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 6x]$, o también $\dfrac{12x - 3\operatorname{sen} 4x + 4\operatorname{sen}^3 2x}{192}$.

(q) $x - 2\ln|e^x - 1|$. (r) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2e^x - 1}{\sqrt{3}}$. (s) $e^x + 2e^{-x} + 2\operatorname{arc\,tg} e^x$.

(t) $\dfrac{\operatorname{arc\,tg} 2^x}{\ln 2}$. (u) $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\right|$.

5. (g) $\operatorname{arc\,sen}\dfrac{x}{5}$. (h) $5\ln\dfrac{5-\sqrt{25-x^2}}{|x|} + \sqrt{25-x^2}$.

(i) $\sqrt{x^2-4} - \dfrac{2|x|}{x}\arccos\dfrac{2}{x}$. (j) $\dfrac{3x^2+8}{15}(x^2-4)^{3/2}$.

(l) $\dfrac{x\sqrt{x^2+4}}{2} + 2\ln\left|\dfrac{x+2+\sqrt{x^2+4}}{x-2-\sqrt{x^2+4}}\right|$, o también $\dfrac{x\sqrt{x^2+4}}{2} + 2\ln\dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$.

(m) $\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right)$. (n) $\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{9-x^2} + 9\operatorname{arc\,sen}\dfrac{x}{3}\right)$.

6. (a) $\dfrac{1}{2}\ln\left|\ln x^2\right|$. (b) $2\ln|\operatorname{sen} x| - \ln|\cos x|$.

(c) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left[\operatorname{arc\,tg}(1+\sqrt{2}x) - \operatorname{arc\,tg}(1-\sqrt{2}x)\right] + \dfrac{\sqrt{2}}{8}\ln\dfrac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}$.

(d) $\dfrac{x^2}{2} - 4x + 9\ln|x+2| + \dfrac{3}{x+2}$. (e) $\dfrac{e^{-x}}{10}(3\operatorname{sen} 3x - \cos 3x)$.

(f) $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arc\,tg} x$. (g) $-\ln|\cos x|$.

(h) $\dfrac{x}{2} + \ln|x| - 2\ln(x^2+3x+4) - \dfrac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x+3}{\sqrt{7}}$. (i) $\dfrac{5}{2}\operatorname{arc\,sen} 2x$.

(j) $\dfrac{1}{40}\left[10\ln|\operatorname{tg} x| + 3\ln|\operatorname{tg} x - 2| - 5\ln|\operatorname{tg} x + 2| - 4\ln(1+\operatorname{tg}^2 x) - 16x\right]$.

(k) $x\operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2}$.

(l) $\dfrac{1}{\ln 3}\left(\ln 3^x + \dfrac{3^x}{2} - 2\ln(3^{2x} + 3^{x+1} + 4) - \dfrac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2\cdot 3^x + 3}{\sqrt{7}}\right)$.

(m) $\dfrac{1}{2}\ln(2x+\sqrt{4x^2+1})$. (n) $-\dfrac{\sqrt{25-x^2}}{25x}$. (ñ) $\dfrac{e^{x^2}(x^2-1)}{2}$.

(o) $\dfrac{\ln|\cos^3 x - 1|}{3}$. (p) $\dfrac{-(1-x^2)^{3/2}}{3}$. (q) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

7. (a) $\operatorname{Dom} a = \mathbb{R}$ y $a'(x) = \dfrac{3x^2}{1+\operatorname{sen}^2 x^3}$. (b) $\operatorname{Dom} b = \mathbb{R}$ y $b'(x) = \dfrac{6x^2}{1+\operatorname{sen}^2 x^3}$.

   (c) $\operatorname{Dom} c = \mathbb{R}$ y $c'(x) = \dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x)}$.

   (d) $\operatorname{Dom} d = \mathbb{R}$ y $d'(x) = \dfrac{\cos \int_a^x \frac{dt}{1+\operatorname{sen}^2 t}}{1+\operatorname{sen}^2 x}$.

   (e) $\operatorname{Dom} e = \mathbb{R}$ y $e'(x) = \displaystyle\int_8^x \frac{dt}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t}$.

   (f) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$ y $f'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2+\operatorname{sen}^2 x}$.

   (g) $\operatorname{Dom} g = \mathbb{R}$ y $g'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{dt}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t}$.

   (h) $\operatorname{Dom} h = \mathbb{R}$ y $h'(x) = 2xe^{-x^4}$. (i) $\operatorname{Dom} i = \mathbb{R}$ e $i'(x) = 3x^2\cos x^3 - 2\cos 2x$.

   (j) Si $a > 0$, $\operatorname{Dom} j = \mathbb{R}^+$; si $a < 0$, $\operatorname{Dom} j = \mathbb{R}^-$; y si $a = 0$ la integral no está definida (ni siquiera como integral impropia). En cualquier caso,

   $$j'(x) = \frac{1}{x(1+x^2)} + \int_a^x \frac{dt}{t^2(1+t^2)} \text{ para todo } x \in \operatorname{Dom} j.$$

   (k) $\operatorname{Dom} k = \mathbb{R}$ y $k'(x) = \dfrac{-\ln(x^2+1)}{1+\left(\int_x^2 \ln(t^2+1)\,dt\right)^2}$.

   (l) $\operatorname{Dom} l = \mathbb{R}$ y $l'(x) = (\cos x)\displaystyle\int_0^{\operatorname{sen} x} e^{y^2}\,dy$. (m) $\operatorname{Dom} m = \mathbb{R}$ y $m'(x) = 0$.

   (n) $\operatorname{Dom} n = \mathbb{R}$ y $n'(x) = \displaystyle\int_2^5 \frac{dt}{t^2 - \operatorname{sen} t}$.

   (ñ) $\operatorname{Dom} \tilde{n} = (s, \infty)$, donde s es la solución de $s^2 = \operatorname{sen} s$ que pertenece a $(0,1)$, y

   $$\tilde{n}'(x) = \int_2^x \frac{dt}{t^2 - \operatorname{sen} t} + \frac{x}{x^2 - \operatorname{sen} x}.$$

   (o) $\operatorname{Dom} o = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y $o'(x) = 2x^2 \operatorname{sen} x^2 - \sqrt{x}\operatorname{sen} x$.

8. (a) $\operatorname{Dom} f = (-\infty, 1)$. (b) $\operatorname{Dom} f' = (-\infty, 1)$ y $f'(x) = \dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{x-1}$.

9. Mínimo global en $(0,0)$ máximo global en $\left(1, \int_0^1 e^{t^2}\,dt\right)$.

10. $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{1\}$. En el punto $x = 1$ se tiene que $F(x)$ no es derivable; sin embargo, $G'(1) = 0 \neq 1 = g(1)$.

11. (a) $f(x)$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$.

    (b) Aplicando la regla de la cadena se obtiene que G es primitiva de g.

    (c) Aplique la Regla de Barrow a la función $g(x)$ en el intervalo $[1, b]$.

12. (a) $f(t) = \operatorname{sen} t$ y $a = \pi/3$. (b) $f(t) = 6t$ y $a = 1/\sqrt[3]{2}$.

13. $f(t) = 2t + 2$ y $a = -1 \pm \sqrt{5}$. Sin embargo, si f no fuese continua no podríamos aplicar el teorema 5.23.

14. (a) $1/3$. (b) 2. (c) 1. (d) $1/2$. (e) $6-3/\sqrt[3]{2}$. (f) $4/15$.
(g) $10/3$. (h) $4752/35$.

15. (a) 0. (b) $\dfrac{88-\pi^3}{24}+\ln 2$.

16. (a) 1. (b) $\dfrac{11}{3840}$. (c) $\dfrac{8}{3}$. (d) $\dfrac{25}{84}$. (e) -18. (f) . (g) . (h) 0.
(i) $\ln\dfrac{5}{2}$. (j) $\dfrac{103}{4}$. (k) $\dfrac{4}{3}$. (l) $\dfrac{1}{3}$. (m) $\dfrac{\pi^2}{16}$. (n) $\dfrac{\pi}{4}$. (ñ) 6π.

17. (a) $\dfrac{1}{2}$. (b) $\dfrac{1}{27}$. (c) $\dfrac{1}{12}$. (d) $\dfrac{7e-16}{6}$. (e) $(e-e^{-1})^3$. (f) $\dfrac{1}{24}$.
(g) 2π. (h) -2π. (i) $-\dfrac{15\pi(\cos 2-\cos 1)}{2}$. (j) 0. (k) 32π. (l) 0.
(m) 0. (n) . (ñ) $\dfrac{2\pi}{5}\rho_0^5(1-\cos\phi_0)$.

18. $\displaystyle\int f(x)\,dx=\frac{1}{3}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ para todo $x\in\mathbb{R}-\{1\}$.
La integral de f en el intervalo $[0,1]$ no existe (diverge a $-\infty$). Sin embargo, en el intervalo $[2,\infty)$ sí existe, y su valor es $\dfrac{1}{6}\left[\ln 7+\sqrt{3}\pi-2\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}(5/\sqrt{3})\right]$.

19. (a) $-\infty$. (b) ∞. (c) $\pi/2$ en el caso $(0,\infty)$, π en el caso $(-\infty,\infty)$. (d) ∞.
(e1) Integrando en $(1,\infty)$: $\frac{-1}{r+1}$ si $r<-1$, ∞ si $r\geq -1$.
(e2) Integrando en $(0,1)$: $-\infty$ si $r\leq -1$, $\frac{1}{r+1}$ si $r>-1$.
(e3) Integrando en $(0,\infty)$: $-\infty$ si $r<-1$, diverge si $r=-1$, ∞ si $r>-1$.
(f) $\frac{5}{4}$. (g) $-\infty$. (h) $\frac{1}{\ln 5-\ln 2}$ en el caso $(0,\infty)$, ∞ en el caso $(-\infty,\infty)$.
(i) $\frac{9\pi-12\ln 2}{20}$. (j) $\frac{-1}{2}$. (k) $-\infty$. (l) $-\infty$. (m) π. (n) $\frac{2}{e}$. (ñ) $-\infty$.
(o) ∞. (p) $1-\frac{\ln 3}{4}$. (q) $-\infty$. (r) $\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$. (s) Diverge. (t) $\pi/2$.
(u) $\frac{1}{e+1}$. (v) Oscila.

20. Porque la integral es impropia (la función del integrando no está definida en $x=1$). Además, la integral es divergente.

21. $\mu=1$.

22. Para el intervalo $[-1,1]$ y el ejercicio 1: son propias las integrales de $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $f(x)$, $g(x)$, $j(x)$, $k(x)$, $l(x)$, $m(x)$ y $n(x)$; es impropia la de $\tilde{n}(x)$; no tienen sentido las de $d(x)$, $e(x)$, $h(x)$, $i(x)$ y $o(x)$.

Para el intervalo $[0,2]$ y el ejercicio 1: son propias las integrales de $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $g(x)$, $k(x)$, $l(x)$ y $m(x)$; son impropias las de $e(x)$, $f(x)$, $h(x)$, $j(x)$ y $\tilde{n}(x)$; no tienen sentido las de $d(x)$, $i(x)$, $n(x)$ y $o(x)$.

Para el intervalo $[\pi/4,\pi/2]$ y el ejercicio 1: son propias las integrales de $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$, $l(x)$, $m(x)$ y $\tilde{n}(x)$; son impropias las de $e(x)$, $j(x)$ y $n(x)$; no tienen sentido las de $d(x)$, $i(x)$ y $o(x)$.

23. (a) 4. (b) ∞. (c) 4π. (d) ∞. (e) 2.

27. (a) Se obtiene $n \geq 13$, y para $n = 13$ la aproximación de la integral es 0,7268758.
    (b) Se obtiene $n \geq 2$, y para $n = 2$ la aproximación de la integral es 0,7274057.

30. La aproximación de la integral es 2,041957. La cota del error es 0,00646117.

31. Zona gris claro: $\int_1^a (f-g)(x)\,dx + \int_a^b (g-f)(x)\,dx + \int_b^6 (f-g)(x)\,dx$.
    Zona gris oscuro: $\int_1^a (g-h)(x)\,dx + \int_a^c (f-h)(x)\,dx + \int_4^b (h-g)(x)\,dx + \int_b^6 (h-f)(x)\,dx$.

32. $\int_{-1}^0 (f-g)(x)\,dx = \int_{-1}^0 (x^3+x^2)\,dx$.

33. (a) $4 - e + e^{-1}$. (b) $\frac{8}{3}$. (c) 8. (d) $\frac{16}{3}$. (e) $\frac{(e-1)^2}{e}$. (f) $\frac{1}{12}$.
    (g) $\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 1\right)$. (h) $\frac{13}{12}$. (i) $\frac{\pi}{2} + \ln\frac{5}{4} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} - \operatorname{arc\,tg} 2$. (j) π.

34. $a = e$.

35. $2\pi r$.

36. (a) $\ln(e^4+1) - 2$. (c) $\frac{e^2 - e + e^{-1} - e^{-2}}{2}$.

37. $\frac{\pi}{9}(82\sqrt{82} - 1)$.

38. Área: $4\pi r^2$. Volumen: $\frac{4\pi r^3}{3}$.

39. Área: $\pi r\sqrt{r^2+h^2} = \pi r g$, donde g es la longitud de la generatriz del cono.
    Volumen: $\frac{\pi r^2 h}{3}$.

40. $\frac{\pi^2}{2}$.

41. $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$.

42. $\frac{3\pi}{2} + 4\pi(\ln^2 2 - \ln 2)$.

46. (a) $\frac{e-1}{2}$. (b) . (c) $-\ln(\cos 1)$.

48. (a) $12(e^4 - 1)$. (b) . (c) $\frac{2}{3}$. (d) $\frac{e-1}{2e}$. (e) $\frac{1}{3}\ln\frac{27}{7}$.
    (f) $\frac{64\pi}{3}$. (g) $\frac{16\pi}{3}(8 - 3\sqrt{3})$.

49. (a) . (b) 2π. (c) .

50. (a) $\pi\sqrt{3}$. (b) $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$. (c) .

Capítulo 6

Sección 6.1

1. (a) No. (b) No.

3. No es un espacio vectorial por varios motivos: Por ejemplo, porque la suma de dos polinomios de grado n puede ser un polinomio de grado menor que n.

Sección 6.2.4

1. La unión de dos subespacios no tiene que ser un subespacio. Por ejemplo, la unión de dos rectas vectoriales de $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3, \ldots$o $\mathbb{R}^3$) no son subespacios.

2. (a) A_1 y A_3 son sistemas de generadores de $\mathbb{P}_2[x]$, pero A_2 no lo es.

   (b) B_1 y B_3 son sistemas de generadores de $\mathbb{R}^2$, pero B_2 no lo es.

Sección 6.3

1. (a) V. (b) F. (c) F.

   (d) V (pero la pregunta no tiene mucho sentido; mejor eliminarla). (e) V.

   (f) F: hay un caso en el que es linealmente dependiente, cuando el vector es el elemento neutro (o vector cero).

2. (a) Linealmente dependientes. (b) Linealmente independientes.

Sección 6.4.6

1. Base de W_1: $\{(-1, 3, -2), (1, 2, 2)\}$. Base de $\mathbb{R}^3$: $\{(-1, 3, -2), (1, 2, 2), (1, 0, 0)\}$.

2. Base de W_2: $B = \{1, \operatorname{sen} x, \cos x\}$. Coordenadas de $\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$ respecto de B: $(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$; coordenadas de $\cos^2 \frac{x}{2}$ respecto de B: $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$.

3. $\dim W_3 = 4$ ($W_3 = \mathbb{P}_3[x]$).

Sección 6.5

1. $\operatorname{ran} A = 2$. Base de C_A: $\{(-3, -1, 1, 3), (0, 1, 2, 3)\}$.

2. Son los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $24 + 24a + 45b - 3ab \neq 0$: para cualquier $b \in \mathbb{R}$ debe elegirse $a \neq \dfrac{15b + 8}{b - 8}$ (para $b = 8$ se puede elegir cualquier valor de a).

Sección 6.8.3

1. A es diagonalizable y B no lo es.

2. C tiene por valores propios a $1+i$ y $1-i$, que son distintos: luego C es diagonalizable.

Sección 6.9

3. Solo son subespacios: W_1, W_4, W_6, W_7 (solo en el caso $a = 0$), W_{10}, W_{11}, W_{12}, W_{14} (solo en el caso $a = 0$), W_{16}, W_{18}, W_{19}, W_{20} y W_{21}.

4. Las dos afirmaciones son correctas.

5. (a) $m = 6$.

7. $(9, 2, 7)$ y $(0, 0, 0)$

9. (a) No. (b) Sí. (c) Sí. (d) No. (e) No. (f) Sí. (g) No.
   (h) Sí. (i) No. (j) Sí. (k) No.

10. (a) $\left.\begin{array}{l} x = 0 + 2\alpha, \\ y = 0 - 7\alpha, \\ z = 0 + \alpha, \end{array}\right\}$ y $\left.\begin{array}{l} x = 0 - \alpha, \\ y = 0 + \alpha, \\ z = 0 + 3\alpha, \end{array}\right\}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

    (b) $\left.\begin{array}{l} x = 0 + \alpha + 2\beta, \\ y = 0 + \alpha + 3\beta, \\ z = 0 - \alpha + 5\beta, \end{array}\right\}$ y $\left.\begin{array}{l} x = 0 + \alpha - 2\beta, \\ y = 0 - \alpha, \\ z = 0 + 3\beta, \end{array}\right\}$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

11. (a) No: $(2, 1, 3) = (1, 1, 2) + (1, 0, 1)$. (b) Sí. (c) Sí.
    (d) No: $(7, -1, 5, 8) = 3(2, -1, 0, 3) + (1, 2, 5, -1)$. (e) No.
    (f) No: $5 + 4x - x^2 = 3(1 + 2x - x^2) - (-2 + 2x - 2x^2)$.
    (g) No: $5 + 3x - 2x^2 = 3(1 - x) + 2(1 + 3x - x^2)$. (h) Sí. (i) Sí. (j) Sí.
    (k) No: la matriz cero es la combinación lineal nula de las otras dos matrices.

13. Son linealmente independientes.

14. (a) No forman base. (b) Sí forman base. (c) Sí. (d) No. (e) No.
    (f) No. (g) No. (h) Sí. (i) No. (j) Sí. (k) No.

15. (a) Las coordenadas son $(1, -1, 2)$. (b) $v = (11, 31, 7)$.

16. (a) Las coordenadas son $(-2, 1, \frac{6}{7})$. (b) $v(x) = 2 - 8x + 10x^2$.

17. (b) Las coordenadas son $(4, -9, 9, -2)$.

18. (a) No son linealmente independientes. Si lo fueran, generarían un subespacio de dimensión 8; lo que es imposible, ya que las matrices de orden 3×2 son un espacio vectorial de dimensión 6.

    (b) Podrían generar o no dicho espacio vectorial: depende de las 8 matrices que se tomen. Es posible que lo generen puesto que los sistemas de generadores de un espacio vectorial de dimensión 6 tienen al menos 6 vectores.

19. (a) Una base es, por ejemplo, $\{(1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$: su dimensión es 2.
    (b) Una base es $\{(1, -1, -1), (2, 3, 0)\}$: su dimensión es 2.
    (c) Base: $\{(2, -1, 4)\}$ (dimensión 1). (d) Base: $\{(1, 1, 1)\}$ (dimensión 1).

20. (a) $\{(-2,1,0,0,0),(-4,0,-1,1,0),(3,0,1,0,1)\}$ (dimensión 3).
    (b) Base: $\{(1,2,0),(-3,0,2)\}$ (dimensión 2).
    (c) Base: $\{(1,1,-4,0),(0,-1,0,1)\}$ (dim 2). (d) Base: $\{(0,-3,1)\}$ (dim 1).
    (e) Base: $\{(3,4,-7)\}$ (dim 1). (f) Base: $\{(-1,1,0,0,0),(1,0,1,0,-1)\}$ (dim 2).

22. Las dimensiones son 2, 0 y 1, respectivamente.

26. (a) $\{(1,-2,0,0,3),(0,1,3,2,0),(0,0,1,1,0)\}$.
    (b) $\{(1,-3,2,2,1),(0,3,6,0,-2),(0,0,-3,0,1)\}$. (c) $\{(1,0,1,1),(0,1,1,3)\}$.

27. (a) $\{(1,2,0,2),(0,-1,5,10),(0,0,0,1)\}$ (rango 3).
    (b) $\{(1,0,0,1,1),(0,1,0,1,2),(0,0,1,1,2)\}$ (rango 3).
    (c) $\{(2,3,1,-3),(0,-4,2,1)\}$ (rango 2).

28. (a) Es base de $\mathbb{R}^3$ para todo $a \neq -1$.

29. (a) La dimensión es: 4 si $a \neq -4$ y $a \neq 1$; 3 si $a=-4$ ó $a=1$.
    (b) La dimensión es: 3 si $a \neq 1$; 2 si $a=1$ y $b \neq 1$; 1 si $a=b=1$.
    (c) La dimensión es: 3 si $a \neq 4$; 2 si $a=4$.
    (d) La dimensión es: 3 si $a \neq 0$ y $b \neq 2$; 2 si $a \neq 0$ y $b=2$; 1 si $a=0$.

30. (a) Debe ser $a \neq 1$, $a \neq 2$ y $b \neq 0$. (b) $W_1 = \mathbb{R}^4$, por el teorema 6.24: $(i) \Leftrightarrow (vii)$.
    (c) Si $a \neq 1$ la base de W_2 es $\{1,0,1,0),(0,1,0,1),(0,0,a-1,0)\}$.
    Si $a=1$ la base de W_2 es $\{1,0,1,0),(0,1,0,1)\}$.

31. (a) No, porque $\dim C_A = \operatorname{ran} A \leq 3$.
    (b) Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $\dim F_A = \dim C_A = \operatorname{ran} A \leq \min(m,n) < \max(m,n)$.

33. Son lineales las aplicaciones de los apartados (a), (b), (c), (d), (g), (h), (i), (j) y (k). No lo son las de los apartados (e), (f) y (l).

34. (a) $T(x,y) = (\frac{2x+4y}{3}, \frac{5x+y}{3})$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
    (b) $T(x,y,z) = (x,y)$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
    (c) $T(ax^2+bx+c) = ax^3+bx^2+cx$ para todo $ax^2+bx+c \in \mathbb{P}_2[x]$.

37. Apartados del ejercicio 34:
    (a) $\operatorname{Ker} T = \{(0,0)\}$ (que no tiene base). $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^2$.
    (b) $\operatorname{Ker} T = \langle(0,0,1)\rangle$. $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^2$.
    (c) $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ (el polinomio cero). $\operatorname{Im} T = \langle x^3, x^2, x\rangle$.

    Apartados del ejercicio 33:

    (a) $\operatorname{Ker} T$ son todas las funciones constantes definidas en $[a,b]$; una de sus bases la forma la función constantemente igual a 1. $\operatorname{Im} T$ son todas las funciones continuas en $[a,b]$; no conocemos una base de $\operatorname{Im} T$ (lo que sí sabemos es que es de dimensión infinita).

    (b) $\operatorname{Ker} T$ son todas las funciones integrables en $[a,b]$ cuya integral en este intervalo es 0; no conocemos una base de $\operatorname{Ker} T$. $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}$; una de sus bases la forma el número 1. Por el teorema de la dimensión podemos asegurar que $\dim(\operatorname{Ker} T) = \infty$.

(c) $\operatorname{Ker} T = \{(0,0)\}$. $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^2$.

(d) $\operatorname{Ker} T = \{(0,0)\}$. $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^2$.

(g) $\operatorname{Ker} T = \{(0,0)\}$. $\operatorname{Im} T = \langle (3,0,1),(0,1,0)\rangle$.

(h) $\operatorname{Ker} T = \langle (0,1,0)\rangle$. $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^2$.

(i) $\operatorname{Ker} T = \langle (1,1,-2)\rangle$. $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^2$.

(j) $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. Por el teorema de la dimensión podemos asegurar que $\operatorname{Im} T = \mathbb{P}_2[x]$.

(k) $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. $\operatorname{Im} T = \mathbb{P}_2[x]$.

38. Denotaremos por $p(\lambda)$, Λ y V_λ al polinomio característico, al conjunto de valores propios y al subespacio propio asociado al valor propio λ, respectivamente, de cada matriz. La ecuación característica es, en cada caso, $p(\lambda) = 0$; y V_λ se introducirá como el subespacio generado por una de sus bases. Así, basta dar $p(\lambda)$, Λ y los V_λ —los dos últimos, sólo cuando sea posible obtenerlos a mano, es decir, sin el uso de métodos numéricos— para dar respuesta a los dos apartados de este ejercicio.

A: $p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda - 1$, $\Lambda = \{3-\sqrt{10}, 3+\sqrt{10}\}$, $V_{3-\sqrt{10}} = \langle (2, 2-\sqrt{10})\rangle$ y $V_{3+\sqrt{10}} = \langle (2, 2+\sqrt{10})\rangle$.

B: $p(\lambda) = \lambda^2 + 7\lambda + 1$, $\Lambda = \{\frac{-7-3\sqrt{5}}{2}, \frac{-7+3\sqrt{5}}{2}\}$, $V_{\frac{-7-3\sqrt{5}}{2}} = \langle (2, -1-\sqrt{5})\rangle$ y $V_{\frac{-7+3\sqrt{5}}{2}} = \langle (2, -1+\sqrt{5})\rangle$.

C: $p(\lambda) = \lambda^2 - 11\lambda$, $\Lambda = \{0, 11\}$, $V_0 = \langle (3,4)\rangle$ y $V_{11} = \langle (2,-1)\rangle$.

D: $p(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 + 29\lambda - 10$ (y compruebe que no tiene raíces enteras).

E: $p(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$, $\Lambda = \{-1, 1, 2\}$, $V_{-1} = \langle (1,1,-2)\rangle$, $V_1 = \langle (1,-1,0)\rangle$ y $V_2 = \langle (1,1,1)\rangle$.

F: $p(\lambda) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 35\lambda$, $\Lambda = \{-7, 0, 5\}$, $V_{-7} = \langle (1,0,-2)\rangle$, $V_0 = \langle (-19,7,10)\rangle$ y $V_5 = \langle (1,2,0)\rangle$.

G: $p(\lambda) = -\lambda^3 + (1+2\cos a)\lambda^2 - (1+2\cos a)\lambda + 1$, $\Lambda = \{1, \cos a + i|\operatorname{sen} a|, \cos a - i|\operatorname{sen} a|\}$ (en particular, $\Lambda = \{1\}$ si $\cos a = 1$ y $\Lambda = \{-1, 1\}$ si $\cos a = -1$; en el primer caso la multiplicidad algebraica de $\lambda = 1$ es 3, y en el segundo la multiplicidad algebraica de $\lambda = -1$ es 2). Caso $\cos a = 1$: $V_1 = \langle (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\rangle$. Caso $\cos a = -1$: $V_{-1} = \langle (1,0,0),(0,1,0)\rangle$ y $V_1 = \langle (0,0,1)\rangle$. Caso $\cos a \neq -1$ y $\cos a \neq 1$: $V_1 = \langle (0,0,1)\rangle$, $V_{\cos a + i \operatorname{sen} a} = \langle (1, i, 0)\rangle$ y $V_{\cos a - i \operatorname{sen} a} = \langle (1, -i, 0)\rangle$.

H: $p(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2$ (y compruebe que no tiene raíces enteras).

J: $p(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda)(8-\lambda)$, $\Lambda = \{1, 2, 4, 8\}$, $V_1 = \langle (-21, 21, -7, 1)\rangle$, $V_2 = \langle (0, 3, -3, 1)\rangle$, $V_4 = \langle (0,0,-1,1)\rangle$ y $V_8 = \langle (0,0,0,1)\rangle$.

K: $p(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 - 7\lambda^2 + 34\lambda - 24$, $\Lambda = \{-3, 1, 2, 4\}$, $V_{-3} = \langle (0,0,-1,1)\rangle$, $V_1 = \langle (0,0,1,1)\rangle$, $V_2 = \langle (-1,1,0,0)\rangle$ y $V_4 = \langle (1,1,0,0)\rangle$.

39. En todos los casos se puede afirmar que las matrices son diagonalizables, como se explica a continuación. Las matrices A, B, C, E, F, G (para el caso $\cos a \neq \pm 1$), J y K son diagonalizables porque en el ejercicio anterior mostramos que todos sus valores propios son distintos (su multiplicidad algebraica es 1). Estudiando los ceros de sus polinomios característicos, es fácil probar que los valores propios de D y H también son distintos (los de D son reales y los de H son uno real y dos complejos conjugados). La matriz G también es diagonalizable si $\cos a = \pm 1$, puesto que las multiplicidades algebraica y geométrica de sus valores propios coinciden (este es el único caso del ejercicio 38 en el que aparecen valores propios que no son simples).

40. A no es diagonalizable: su valor propio $\lambda = -1$ tiene multiplicidad algebraica 2 y multiplicidad geométrica 1.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -6 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

E no es diagonalizable: su valor propio $\lambda = 2$ tiene multiplicidad algebraica 2 y multiplicidad geométrica 1.

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-\sqrt{3}i}{2} & \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \\ 1 & \frac{5-3\sqrt{3}i}{26} & \frac{5+3\sqrt{3}i}{26} \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3/7 & 13/7 & -1/7 \\ \frac{27+11\sqrt{3}i}{42} & \frac{-117+13\sqrt{3}i}{42} & \frac{15-4\sqrt{3}i}{21} \\ \frac{27-11\sqrt{3}i}{42} & \frac{-117-13\sqrt{3}i}{42} & \frac{15+4\sqrt{3}i}{21} \end{pmatrix}.$$

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

41. (a) $5^5 \begin{pmatrix} 13 - 15 \cdot 2^{20} & -10 + 12 \cdot 2^{20} \\ 18 - 20 \cdot 2^{20} & -14 + 16 \cdot 2^{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -49151959375 & 39321568750 \\ -65535943750 & 52428756250 \end{pmatrix}.$

(b) $\begin{pmatrix} 378 & -378 & -4496 \\ -63 & 8926 & 8866 \\ 189 & 8358 & 8426 \end{pmatrix}.$

Capítulo 7

En las soluciones de este tema donde aparezca una integral indefinida, se supondrá que se refiere a sólo una primitiva (cualquiera) de la función del integrando.

Sección 7.2.4

1. (a) Sí. (b) Sí. (c) Sí. (d) Sí. (e) No. (f) No.

2. (a) $y = -\dfrac{(t-k)^3}{27} \quad \forall k \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$.

3. (a) $y = \dfrac{2t}{2kt^2 - 1} \quad \forall k \in \mathbb{R}$ (el dominio de la solución depende de k).

4. (a) Es igual al apartado (b) del ejercicio 18 de la sección 7.5.

   (b) $y = \dfrac{2}{1 + ke^{t^2}} \quad \forall k \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$.

5. (a) No es exacta, sino de Bernoulli.

   (b) No es exacta ni de ningún tipo de los estudiados.

   (c) $y = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{8k-3t^4}-t^2}{2}} \quad \forall k > 0$ (el dominio depende de k).

   (d) $y = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{9t^4-4t^3+4k}-3t^2}{2}} \quad \forall k \in \mathbb{R}$ (el dominio depende de k).

Sección 7.3.7

1. (a) $y = \alpha e^{2t} + \beta e^{-\frac{4t}{3}} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$.

   (b) $y = e^{-t}(\alpha + \beta t) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$.

2. $y = 6e^{\frac{2t}{3}}\left(\cos\dfrac{\sqrt{5}t}{3} + \dfrac{5}{\sqrt{5}}\operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{5}t}{3}\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

4. $y = 2 + \dfrac{t}{2} + \alpha e^{(3+\sqrt{7})t} + \beta e^{(3-\sqrt{7})t} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$.

5. $y = \dfrac{1+t-2e^t\operatorname{sen} t}{4} + e^{2t}(\alpha + \beta t) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$.

Sección 7.5

1. (a) $(y_1, y_2) = (k_1e^{2t} + 2k_2e^{3t},\ k_1e^{2t} + k_2e^{3t}) \quad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$.

   (b) En este sistema se ha corregido una errata: la segunda ecuación debe ser la siguiente: $y_2' = -2y_1 + 5y_2 + y_3$. Entonces la solución del sistema es $(y_1, y_2, y_3) = (-k_1e^t + k_2e^{2t} - k_3e^{6t},\ -k_1e^t + 4k_3e^{6t},\ 2k_1e^t + 2k_2e^{2t} + 2k_3e^{6t}) \quad \forall k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$.

2. $y_1(t) = 10e^{4t} + 80e^t$ e $y_2(t) = -10e^{4t} + 160e^t \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Sección 7.6

1. (a) $y = ke^{t^2/2} \quad \forall k \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$; (b) $y = k\sqrt{9+t^2} \quad \forall k \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$;

   (c) $8\ln|y| - y^2 + e^{-t^2} = k$ (en el caso en el que la solución quede implícita, no se especificarán los posibles valores de k ni el dominio de la solución cuando éstos no puedan determinarse fácilmente);

   (d) $y = \dfrac{kt}{1+(1+k)t} \quad \forall k \in \mathbb{R}$ y $\forall t \neq \frac{-1}{1+k}$;

   (e) $y = -1 \pm \sqrt{1 - \ln(2+\cos^2 t) - k}$ (k no puede tomar todos los valores reales, y el dominio de la solución dependerá de k);

   (f) $y = \operatorname{tg}(k + e^t) \quad \forall k \in \mathbb{R}$ (el dominio depende de k).

2. (a) $y = e^{\frac{t^2}{2}-2} \quad \forall t \in \mathbb{R}$; (b) $y = \sqrt{9+t^2} \quad \forall t \in \mathbb{R}$; (c) $\ln y^8 - y^2 + e^{-t^2} = 0$;

   (d) $y = -t \quad \forall t \in \mathbb{R}$;

   (e) $y = -1 \pm \sqrt{1 - \ln(2+\cos^2 t) + \ln 2} \quad \forall t \in \left[\arccos\sqrt{\frac{e-1}{2}},\ \arccos\left(-\sqrt{\frac{e-1}{2}}\right)\right]$;

   (f) $y = \operatorname{tg}\left(e^t + \dfrac{\pi}{4} - 1\right) \quad \forall t \in \left(\ln\frac{4-3\pi}{4},\ \ln\frac{4+\pi}{4}\right)$.

3. $p(t) = \dfrac{mp_0e^{at}}{m - p_0(1-e^{at})}$ $\forall t \geq 0$. Como $\lim_{t\to\infty} p(t) = m$, esto quiere decir que la población tiende a crecer hasta la población máxima m.

4. $x(t) = A \operatorname{sen}\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t + \operatorname{arc\,sen}\dfrac{x_0}{A}\right) = \sqrt{A^2 - x_0^2}\,\operatorname{sen}\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t + x_0\cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t \quad \forall t \geq 0.$

5. $k = \dfrac{9{,}8}{125} = 0{,}0784.$

6. 25,59 dias.

7. La concentración de azúcar no alterado será del 0,125 % 6 horas después, y del 0,0078125 % 12 horas después.

8. Había 108 moscas en la hora 0, y habría aproximadamente 1389 a los 10 dias del experimento.

9. $300\ln 3 = 329{,}584$ segundos.

10. $250\sqrt{2} \simeq 354$ ácaros.

12. (a) $y = k \pm \sqrt{k^2 + kt} \quad \forall k \in \mathbb{R}$ (el dominio depende de k);

    (b) $y = te^{kt+1} \quad \forall k \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$;

    (c) $\ln\dfrac{(t+y)^2(2t^2 - ty + y^2)}{|t^3|} + \dfrac{2\sqrt{7}}{7}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2y-t}{\sqrt{7}t} = k$;

    (d) $y = \pm x\sqrt{\dfrac{1}{3} - \dfrac{k}{3x^6}} \quad \forall k \in \mathbb{R}$ (el dominio depende de k).

13. (a) $y = \dfrac{1 + \sqrt{1+3t}}{3} \quad \forall t \geq -\frac{1}{3}$; (b) $y = t2^te^{1-t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$;

    (c) $\ln\dfrac{(t+y)^2(2t^2 - ty + y^2)}{|t^3|} + \dfrac{2\sqrt{7}}{7}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2y-t}{\sqrt{7}t} = \ln\dfrac{63}{8}$;

    (d) $y = x\sqrt{\dfrac{1}{3} + \dfrac{26}{3x^6}} \quad \forall x \in (-\infty, 0)$ o $\forall x \in (0, \infty)$.

14. (a) $P = 2 + ke^{t(1-t)} \quad \forall k \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$;

    (b) $y = \left[\displaystyle\int e^{-\cos t}\cos t\,dt + k\right]e^{\cos t} \quad \forall k \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$;

    (c) $y = \left[\displaystyle\int (1+t)e^{e^t}\,dt + k\right]e^{-e^t} \quad \forall k \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$;

    (d) $y = t^2 + ke^{-t} \quad \forall k \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$; (e) $y = \left(\dfrac{e^{2t}}{2} + k\right)e^t \quad \forall k \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$;

    (f) $y = kt + 2t\sqrt{t} \quad \forall k \in \mathbb{R}$ y $\forall t \geq 0$.

15. (a) $P = 2 - e^{t(1-t)} \quad \forall t \in \mathbb{R}$;

    (b) $y = e^{\cos t}\left[2e^{-\cos 1} + \displaystyle\int_1^t e^{-\cos u}\cos u\,du\right] \quad \forall t \in \mathbb{R}$;

    (c) $y = e^{-e^t}\left[e^{e^2} + \displaystyle\int_2^t (1+u)e^{e^u}\,du\right] \quad \forall t \in \mathbb{R}$; (d) $y = t^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$;

(e) $y = \dfrac{1}{2}\left(e^{3t} - e^{t}\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}$; $\qquad$ (f) $y = t + 2t\sqrt{t} \quad \forall t \geq 0$.

16. (a) $I(t) = \dfrac{E_0}{R} + \left(I_0 - \dfrac{E_0}{R}\right) e^{-\frac{R}{L}t} \quad \forall t \geq 0$;

    (b) $I(t) = \dfrac{E_0 R \operatorname{sen} \omega t - E_0 L\omega \cos \omega t}{R^2 + L^2\omega^2} + \left(I_0 + \dfrac{E_0 L\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\right) e^{-\frac{R}{L}t} \quad \forall t \geq 0$.

17. (a) $y = e^t - t - 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$;

    (b) $y(t) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{t^k}{k!} + \frac{y^{(n+1)}(c) + t + 1}{(n+1)!} t^{n+1}$, con c en $(0,t)$ o $(t,0)$, y $\forall t \geq 0$.

18. (a) $y = \pm\sqrt[4]{t^2 + \dfrac{k}{t^2}} \quad \forall k \in \mathbb{R}$ (el dominio depende de k);

    (b) $y = \pm\sqrt[4]{2e^{-t^2} + ke^{-2t^2}} \quad \forall k \in \mathbb{R}$ (el dominio depende de k);

    (c) $y = \pm\sqrt{\dfrac{5x}{2 + kx^5}} \quad \forall k \in \mathbb{R}$ (el dominio depende de k);

    (d) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{k|x| + x^2}} \quad \forall k \in \mathbb{R}$ (el dominio depende de k).

19. (a) $y = \pm\sqrt[4]{t^2 - \dfrac{1}{t^2}} \quad \forall t \geq 1$ (este problema de valores iniciales tiene dos soluciones);

    (b) $y = \sqrt[4]{2}\, e^{-\frac{t^2}{4}} \quad \forall t \in \mathbb{R}$; $\qquad$ (c) $y = -2\sqrt{\dfrac{5x}{8 + x^5}} \quad \forall x \geq 0$;

    (d) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 2x}} \quad \forall x \in (0,2)$.

21. (a) $y = \dfrac{1}{2}\left(t^2 \pm \sqrt{t^4 - 4t^3 + 4k}\right) \quad \forall k \in \mathbb{R}$ (el dominio depende de k);

    (b) $y = 1 - x \pm \sqrt{2x^2 + 8x + k} \quad \forall k \in \mathbb{R}$ (el dominio depende de k);

    (c) $y = \sqrt[3]{\dfrac{k}{x^2}} \quad \forall k \in \mathbb{R}$ y $\forall x \in \mathbb{R}$; $\qquad$ (d) $e^t \operatorname{sen} y + 2y \cos t = k$.

22. (a) $y = \dfrac{1}{2}\left(t^2 - \sqrt{t^4 - 4t^3 + 4}\right) \quad \forall t \leq t_0$ (t_0 es la raíz de la ecuación $t^4 - 4t^3 + 4 = 0$ situada en el intervalo $(1,2)$);

    (b) $y = 1 - x - \sqrt{2x^2 + 8x + 12} \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

    (c) $y = -\sqrt[3]{\dfrac{4}{x^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$; $\qquad$ (d) $e^t \operatorname{sen} y + 2y \cos t = 0$.

23. (a) $y = m + ke^{2t} - 3t \quad \forall k, m \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$; $\qquad$ (b)

24. (a) $y = x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$; $\qquad$ (b) $y = \sqrt{2} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{t}{\sqrt{2}} \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

25. Si denotamos $L(y) = y'' - 2y'/x + 2y/x^2$, es inmediato que $L(y_1) = L(y_2) = 0$. Además, $W(y_1, y_2)(x) = W(x, x^2)(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sin embargo, los coeficientes de la ecuación lineal considerada son las funciones $a(x) = -2/x$ y $b(x) = 2/x^2$, que pueden estar definidas en $(-\infty, 0)$ o $(0, \infty)$. Luego el mencionado teorema

sólo es aplicable en estos intervalos (o subintervalos suyos). Por tanto el dato de que $W(x, x^2)(0) = 0$ no contradice al teorema, que sólo exige que $W(x, x^2)(x) \neq 0$ si $x \neq 0$.

26. La ecuación dada puede escribirse así: $y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{2}{1-x^2}y = 0$. Las soluciones estarán definidas, por lo general, en uno de los siguientes intervalos: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, \infty)$. La segunda solución buscada puede ser, por ejemplo, $y_2 = -1 + \frac{x}{2} \ln \left|\frac{1+x}{1-x}\right|$. Otro resultado posible es $\overline{y}_2 = 1 + \frac{x}{2} \ln \left|\frac{1-x}{1+x}\right| = -y_2$.

27. La ecuación dada puede escribirse así: $y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = 0$. Las soluciones estarán definidas, por lo general, en el intervalo $(-\infty, 0)$ o en el intervalo $(0, \infty)$. La segunda solución buscada puede ser, por ejemplo, $y_2(x) = \frac{-1}{3x^2}$. $u(x) = 3x + \frac{4}{x^2}$ para todo $x \in (-\infty, 0)$. $v(x) = \frac{5x^3-4}{3x^2}$ para todo $x \in (0, \infty)$.

28. (a) $y = \alpha e^t + \beta e^{-2t} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$;

    (b) $y = \alpha e^{t/2} + \beta e^{-t/3} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$;

    (c) $y = (\alpha + \beta t)\, e^{-2t} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$;

    (d) $y = (\alpha + \beta t)\, e^{t/3} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$;

    (e) $y = \big(\alpha \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}t + \beta \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t\big)e^{-t/2} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$;

    (f) $y = \big(\alpha \operatorname{sen} \frac{3}{2}t + \beta \cos \frac{3}{2}t\big)e^{t/2} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$.

29. (a) $y = \frac{1}{3}\left(e^t - e^{-2t}\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}$; (b) $y = \frac{6}{5}\left(e^{\frac{t-6}{2}} - e^{\frac{6-t}{3}}\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}$;

    (c) $y = (7 + 5t)\, e^{-2-2t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$; (d) $y = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$;

    (e) $y = \big(\frac{5}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}t - \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t\big)e^{-t/2} \quad \forall t \in \mathbb{R}$; (f) $y = \frac{2}{3}e^{\frac{t-\pi}{2}} \cos \frac{3}{2}t \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

30. (a) $y = (t + \alpha) \operatorname{sen} t + (\beta + \ln(\cos t)) \cos t \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in (0, \frac{\pi}{2})$;

    (b) $y = (\alpha + \beta t - \ln|t|)\, e^{-2t} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in (-\infty, 0)$ o $\forall t \in (0, \infty)$;

    (c) $y = \big(\alpha + \beta t + \frac{1}{4}t^2(2\ln t - 3)\big)\, e^{-t} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in (0, \infty)$;

    (d) $y = \big(\alpha - \frac{4}{3}t\big) \cos 3t + \big(\beta + \frac{4}{9}\ln(\operatorname{sen} 3t)\big) \operatorname{sen} 3t \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in (0, \frac{\pi}{6})$.

31. (a) $y = \big(t - \frac{\pi}{4}\big) \operatorname{sen} t + \ln(\sqrt{2} \cos t) \cos t \quad \forall t \in (0, \frac{\pi}{2})$;

    (b) $y = (-2 + 2t - \ln t)\, e^{-2t} \quad \forall t \in (0, \infty)$;

    (c) $y = \frac{1}{4}\left(-1 + 4t + t^2(2\ln t - 3)\right) e^{-t} \quad \forall t \in (0, \infty)$;

    (d) $y = \frac{2}{9}\left((\pi - 6t) \cos 3t + 2\ln(\operatorname{sen} 3t) \operatorname{sen} 3t\right) \quad \forall t \in (0, \frac{\pi}{6})$.

32. $y = \dfrac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}}\left(\alpha + \dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{\cos t}{\sqrt{t}}\left(\beta - \dfrac{3t}{2}\right) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in (0, \infty)$.

33. $y = e^{3t}\displaystyle\int c(t)e^{-3t}\, dt - e^{2t}\int c(t)e^{-2t}\, dt \quad \forall t \in I$.

34. (a) $y = \dfrac{3}{17}\cos t - \dfrac{5}{17}\operatorname{sen} t + \alpha e^{4t} + \beta e^{-t} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$;

    (b) $y = -t^2 + \dfrac{3}{2}t - \dfrac{13}{8} + \alpha e^{4t} + \beta e^{-t} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$;

    (c) $y = -\dfrac{1}{5}te^{-t} + \alpha e^{4t} + \beta e^{-t} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$;

(d) $y = \dfrac{3}{17}\cos t - \dfrac{5}{17}\operatorname{sen} t - t^2 + \dfrac{3}{2}t - \dfrac{13}{8} + \alpha e^{4t} + \Big(\beta - \dfrac{t}{5}\Big)e^{-t} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$;

(e) $y = \dfrac{e^t}{50}\big((2-10t)\cos 2t + (11-5t)\operatorname{sen} 2t\big) + \alpha\cos t + \beta \operatorname{sen} t \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$;

(f) $y = \dfrac{e^t}{25}(4\operatorname{sen} t + 3\cos t) + (\alpha + \beta t)e^{-t} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$;

(g) $y = \dfrac{21}{32} - \dfrac{5t}{8} + \dfrac{t^2}{4} + \alpha e^{-t} + \beta e^{-4t} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$;

(h) $y = \alpha + \dfrac{2t}{125} - \dfrac{t^2}{25} + \dfrac{t^3}{15} + \beta e^{-5t} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$;

(i) $y = \dfrac{e^{2t}}{324}(18t^2 - 18t + 7) + \alpha e^{-t} + \beta e^{-4t} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$;

(j) $y = e^{-2t}\Big(\alpha + \beta t + \dfrac{t^3}{6}\Big) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$;

(k) $y = (\alpha + t)\cos 2t + (\beta + 2t^2)\operatorname{sen} 2t \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$;

(l) $y = \dfrac{2t^2 + 2t + 3}{8} + \alpha\cos 2t + \beta \operatorname{sen} 2t \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$;

(m) $y = \Big(\dfrac{t}{4} + \alpha\Big)\cos t + \Big(\dfrac{t^2}{4} + \beta\Big)\operatorname{sen} t \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$;

(n) $y = e^{-t}(4\operatorname{sen} t - t\cos t + \alpha + \beta t) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$;

(ñ) $y = \dfrac{t^2}{2} - t + \alpha + \beta e^{-t} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$;

(o) $y = e^{-t}\Big(\dfrac{t^3}{6} - t^2 + \beta t + \alpha\Big) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$;

(p) $y = \dfrac{e^{-3t}}{25}(3 + 5t^2) + \alpha e^{\frac{1+\sqrt{5}}{-2}t} + \beta e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}t} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$;

(q) $y = \dfrac{e^{2t}}{2}(\alpha - 2t - t^2 + \beta e^t) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$.

35. (a) $y = \dfrac{1}{85}\big(19e^{4t} - 34e^{-t} + 15\cos t - 25\operatorname{sen} t\big) \quad \forall t \in \mathbb{R}$;

(b) $y = -t^2 + \dfrac{3}{2}t - \dfrac{13}{8} + \dfrac{49}{10}e^{4t-8} - \dfrac{47}{20}e^{2-t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$;

(c) $y = -\dfrac{1}{5}te^{-t} + \dfrac{15+e}{25}e^{4t+4} + \dfrac{35-6e}{25}e^{-t-1} \quad \forall t \in \mathbb{R}$;

(d) $y = \dfrac{3}{17}\cos t - \dfrac{5}{17}\operatorname{sen} t - t^2 + \dfrac{3}{2}t - \dfrac{13}{8} + \dfrac{301}{3400}e^{4t} + \dfrac{34-5t}{25}e^{-t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$;

(e) $y = \dfrac{1}{50}\big(e^t[(2-10t)\cos 2t + (11-5t)\operatorname{sen} 2t] - 52\cos t + 136\operatorname{sen} t\big) \quad \forall t \in \mathbb{R}$;

(f) $y = \dfrac{e^t}{25}(4\operatorname{sen} t + 3\cos t + 2e^{-2t}) \quad \forall t \in \mathbb{R}$;

(g) $y = \dfrac{21}{32} - \dfrac{5t}{8} + \dfrac{t^2}{4} + \dfrac{4e^{1-t}}{3} + \dfrac{5e^{4-4t}}{96} \quad \forall t \in \mathbb{R}$;

(h) $y = -\dfrac{2377}{625} + \dfrac{2t}{125} - \dfrac{t^2}{25} + \dfrac{t^3}{15} + \dfrac{197e^{15-5t}}{625} \quad \forall t \in \mathbb{R}$;

(i) $y = \dfrac{e^{2t}}{324}(18t^2 - 18t + 7) + 640e^{-t} - 323e^{-4t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$;

(j) $y = e^{-2t}\Big(t + \dfrac{t^3}{6}\Big) \quad \forall t \in \mathbb{R};$

(k) $y = (t-1)\cos 2t + \Big(2t^2 - \dfrac{1}{2}\Big)\operatorname{sen} 2t \quad \forall t \in \mathbb{R};$

(l) $y = \dfrac{1}{8}\big(2t^2 + 2t + 3 + (\cos 2 - \operatorname{sen} 2)\cos 2t + (\cos 2 - \operatorname{sen} 2)\operatorname{sen} 2t\big) \quad \forall t \in \mathbb{R};$

(m) $y = \Big(\dfrac{t}{4} + 2\Big)\cos t + \Big(\dfrac{t^2}{4} + 1\Big)\operatorname{sen} t \quad \forall t \in \mathbb{R};$

(n) $y = e^{-t}(4\operatorname{sen} t - t\cos t + 7) \quad \forall t \in \mathbb{R};$

(ñ) $y = \dfrac{t^2}{2} - t \quad \forall t \in \mathbb{R};$

(o) $y = e^{-t}\Big(\dfrac{t^3}{6} - t^2 - t + 1\Big) \quad \forall t \in \mathbb{R};$

(p) $y = \dfrac{1}{50}\Big(2e^{-3t}(3+5t^2) - (13\sqrt{5}+3)e^{\frac{1+\sqrt{5}}{-2}t} + (13\sqrt{5}-3)e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}t}\Big) \quad \forall t \in \mathbb{R};$

(q) $y = \dfrac{e^{2t}}{2}(2 - 2e^{-4} - 2t - t^2 + 6e^{t-2} + 2e^{t-6}) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

36. El dominio no lo especifica el problema, salvo en el apartado (c), por lo que no se indicará en las respuestas. Matemáticamente las soluciones tienen sentido en todo $\mathbb{R}$ en los cinco apartados.

(a) La ecuación es $LQ''(t) + \dfrac{Q(t)}{C} = 0$, y su solución general es la función Q_h definida por

$$Q_h(t) = \alpha \operatorname{sen}\frac{t}{\sqrt{LC}} + \beta\cos\frac{t}{\sqrt{LC}} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Como $Q_h(t) = Q_h(t + 2\pi\sqrt{LC})$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $Q_h(t)$ es una función periódica de periodo $2\pi\sqrt{LC}$.

(b) La ecuación es $LQ''(t) + \dfrac{Q(t)}{C} = E_0\cos\omega t$, y su solución general es la función Q_c definida por

$$Q_c(t) = \begin{cases} \dfrac{E_0 C}{1 - CL\omega^2}\cos\omega t + \alpha\operatorname{sen}\dfrac{t}{\sqrt{LC}} + \beta\cos\dfrac{t}{\sqrt{LC}} & \omega \neq \dfrac{1}{\sqrt{LC}}, \\ \Big(\alpha + \dfrac{E_0\sqrt{C}}{2\sqrt{L}}t\Big)\operatorname{sen}\dfrac{t}{\sqrt{LC}} + \beta\cos\dfrac{t}{\sqrt{LC}} & \omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}, \end{cases}$$

para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. En el segundo caso $Q_c(t)$ no es una función acotada porque a medida que t crece, el primer sumando de $Q(t)$ va alcanzando valores cada vez mayores (positivos y negativos).

(c) La ecuación es $LQ''(t) + RQ'(t) + \dfrac{Q(t)}{C} = 0$, y su solución general es la función $Q_{R,h}$ definida por

$$Q_{R,h}(t) = \begin{cases} \alpha e^{\frac{-R+\sqrt{R^2-4L/C}}{2L}t} + \beta e^{\frac{-R-\sqrt{R^2-4L/C}}{2L}t} & R^2C > 4L, \\ (\alpha + \beta t)e^{\frac{-R}{2L}t} & R^2C = 4L, \\ \Big(\alpha\cos\dfrac{\sqrt{-R^2+4L/C}}{2L}t + \beta\operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{-R^2+4L/C}}{2L}t\Big)e^{\frac{-R}{2L}t} & R^2C < 4L, \end{cases}$$

para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(d) La ecuación es $LQ''(t) + RQ'(t) + \dfrac{Q(t)}{C} = E_0 \cos \omega t$, y su solución general es la función $Q_{R,c}$ definida por

$$Q_{R,c}(t) = \frac{E_0 C}{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}\big((1-\omega^2 LC)\cos \omega t + \omega RC \operatorname{sen} \omega t\big) + Q_{R,h}(t),$$

donde $Q_{R,h}$ es la solución general del apartado (c).

(e) La ecuación es $LQ''(t) + \dfrac{Q(t)}{C} = E(t)$, y su solución general es la función Q_c definida por

$$Q_c(t) = \Big(\alpha + \sqrt{\frac{C}{L}} \int E(t) \cos \frac{t}{\sqrt{LC}}\, dt\Big) \operatorname{sen} \frac{t}{\sqrt{LC}} +$$
$$+ \Big(\beta - \sqrt{\frac{C}{L}} \int E(t) \operatorname{sen} \frac{t}{\sqrt{LC}}\, dt\Big) \cos \frac{t}{\sqrt{LC}},$$

para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

42. $(y_1, y_2, y_3) = (-19k_1 + k_2 e^{5t} + k_3 e^{-7t},\ 7k_1 + 2k_2 e^{5t},\ 10k_1 - 2k_3 e^{-7t}) \quad \forall k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$ (primer sistema).

    $(y_1, y_2, y_3) = (k_2 e^{-t} + 2k_3 e^{8t},\ -2(k_1 + k_2)e^{-t} + k_3 e^{8t},\ 2k_1 e^{-t} + 2k_3 e^{8t}) \quad \forall k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in \mathbb{R}$ (segundo sistema).

43. Al cabo de 6 meses, según el modelo, habrá 11395 individuos de la población E_1 y 16623 individuos de la población E_2. Y a los 10 meses habrá 31662 individuos de la población E_1 y 44210 de la población E_2.

Capítulo 8

Sección 8.1.3

1. (a) $r_1(\theta) = (1 + 3\cos\theta, -2 + 3\operatorname{sen}\theta) \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$.

    (b) $r_2(\theta) = (1 + 3\cos\theta, -2 + 3\operatorname{sen}\theta, 14 + 6\cos\theta - 12\operatorname{sen}\theta) \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$.

2. Parametrizamos la frontera en cuatro trozos mediante las siguientes parametrizaciones (podrían elegirse otras):

    $r_1(t) = (t, d) \quad \forall t \in [a, b]$; $\qquad r_2(t) = (b, d + (c - d)t) \quad \forall t \in [0, 1]$;

    $r_3(t) = (b + (a - b)t, c) \quad \forall t \in [0, 1]$; $\qquad r_4(t) = (a, t) \quad \forall t \in [c, d]$.

3. *Nota*: En el enunciado debe decir que $x \in [0, 3]$ (en vez de $x \in [-3, 3]$).

    La representación de la curva parametrizada coincide con la de la gráfica de la función $f(u) = (u^2 + 2u + 1)(u^2 + 2u + 2)$ en el dominio $[-1, \sqrt{3} - 1]$. Pruebe que f es estrictamente creciente y convexa en dicho dominio. Luego, basta considerar que $f(-1) = 0$, $f(0) = 2$ y $f(\sqrt{3} - 1) = 12$ para representar de manera suficientemente adecuada la curva.

Sección 8.2

1. Las dos curvas del ejercicio 1 son regulares para las parametrizaciones r_1 y r_2. También es regular la curva del ejercicio 2 para la parametrización dada.

2. Recta tangente: $(x,y,z) = \left(3 - \frac{5}{\sqrt{2}}, -10t, 4\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

   Recta normal: las cuentas son complicadas.

   Plano osculador: $(x,y,z) = \left(3 - \frac{5}{\sqrt{2}} + (10\sqrt{2} - 3)s, -10t, 4 - 4s\right) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$.

3. Velocidad: $r'(t) = \left(-\frac{10}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} 2t + 3\cos t, 10\cos 2t, 4\cos t\right) \quad \forall t \in [0,\pi]$.

   Rapidez: $\|r'(t)\| = \sqrt{50 + 50\cos^2 2t + 25\cos^2 t - 30\sqrt{2}\cos t} \quad \forall t \in [0,\pi]$.

   Aceleración: $r''(t) = (-10\sqrt{2}\cos 2t - 3\operatorname{sen} t, -20\operatorname{sen} 2t, -4\operatorname{sen} t) \quad \forall t \in [0,\pi]$.

Sección 8.3

1. $2 + \ln 3$.

Sección 8.4.3

1. $s(\theta,\phi) = (\rho_0\cos\theta\operatorname{sen}\phi, \rho_0\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, \rho_0\cos\phi) \quad \forall(\theta,\phi) \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \times [0,\pi]$.

2. $s(\theta,\phi) = (a + \rho_0\cos\theta\operatorname{sen}\phi, b + \rho_0\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, c + \rho_0\cos\phi) \quad \forall(\theta,\phi) \in [0,2\pi] \times [0,\pi]$.

3. $r(\theta) = (2\sqrt{3}\cos\theta, 2\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta, 2) \quad \forall\theta \in [0,2\pi]$.

Sección 8.5

1. S no tiene puntos singulares. Debe probarse que $(3,5,4) = s(\frac{\pi}{2}, 4)$.

   Recta normal: $(x,y,z) = (3, 5 + \frac{5}{\sqrt{2}}t, 4) \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Plano tangente: $y = 5$.

3. (a) Los puntos singulares son $s\left(\frac{-\sqrt{2}}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) = \left(\frac{1-4\sqrt{2}}{8}, \frac{1+4\sqrt{2}}{8}, \frac{3\pi-\sqrt{2}}{4}\right)$ y $s\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{7\pi}{4}\right) = \left(\frac{1+4\sqrt{2}}{8}, \frac{1-4\sqrt{2}}{8}, \frac{7\pi+\sqrt{2}}{4}\right)$.

   (b) La superficie S no es suave, ya que los dos puntos singulares son imágenes de puntos del interior del dominio de la parametrización s. S es suave a trozos puesto que el dominio de s puede descomponerse en trozos de manera que los puntos $\left(\frac{-\sqrt{2}}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$ se sitúen en la frontera de dichos trozos: por ejemplo, esos trozos podrían ser $\left[-1, \frac{-\sqrt{2}}{4}\right] \times [0,2\pi]$, $\left[\frac{-\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right] \times [0,2\pi]$ y $\left[\frac{\sqrt{2}}{4}, 1\right] \times [0,2\pi]$.

Sección 8.6

1. El área es $2\pi\rho_0(\rho_0 - \sqrt{\rho_0^2 - \rho^2})$. Si $\rho \to \rho_0^-$ el área tiende a ser $2\pi\rho_0^2$.

2. 2π.

Sección 8.7.4

2. Punto seleccionado: $(-1,1,0) \in S$. Plano tangente: $x-2y+z+3=0$.
   Recta normal: $(x,y,z)=(-1+t,1-2t,t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

3. Parametrización de la trayectoria: $r(t)=\left(\dfrac{-1}{3t-1}, e^{-2t}\right) \quad \forall t \in [0,\frac{1}{3})$.
   $k(x)=e^{\frac{2-2x}{3x}} \quad \forall x \in [0,\infty)$.

Sección 8.8

1. $r(\theta)=(\cos\theta,\, \operatorname{sen}\theta,\, 1-\cos\theta-\operatorname{sen}\theta) \quad \forall \theta \in [0,2\pi]$.
2. $r(\theta)=(a\cos\theta,\, b\operatorname{sen}\theta) \quad \forall \theta \in [0,2\pi]$.
3. (a) Es simple. (b) No es simple, ya que $s(-t)=s(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
4. Se puede restringir el dominio a $[0,\infty)$ o a $(-\infty,0]$.
5. (a) Los puntos de corte son $r(3-2\sqrt{5})=s(-2+\sqrt{5})=(9-2\sqrt{5},5-2\sqrt{5})$ y $r(3+2\sqrt{5})=s(-2-\sqrt{5})=(9+2\sqrt{5},5+2\sqrt{5})$.

   (b) El único punto de corte es $r(t_1)=s(4t_1+3)\simeq(0{,}1938374,-0{,}8061636)$, donde $t_1\simeq-0{,}70154065$ es el único cero de la función $f(t)=\operatorname{sen}\pi t-4t-2$ en $\mathbb{R}$ (que se ha obtenido aplicando el método de Newton-Raphson).
6. Un vector tangente es b. No existen vectores normales a esa curva.
7. Colocamos la circunferencia de radio $\alpha \in (0,\infty)$ con centro en $(0,0)$. Entonces se parametriza, por ejemplo, por $r(t)=(\alpha\cos t,\alpha\operatorname{sen} t)$ ($t \in [0,2\pi]$). Basta comprobar $r'(t)\cdot r(t)=0$ para todo $t \in [0,2\pi]$.
8. El único punto que cumple lo solicitado es $r(1)=(-1,1,2)$. Una parametrización de la recta tangente en este punto es: $u(t)=(-1-2t,1+2t,2+4t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.
9. (a) El único punto es $r(0)=(0,1)$; (b) El único punto es $r(1)=(1,2)$;
   (c) El único punto es $r(-1)=(-1,2)$.
10. El único punto de corte es $r(0)=s(1)=(1,2,-2)$, y el ángulo que forman las curvas al cortarse en este punto es de $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}}\simeq 1{,}10715$ radianes.
11. $r(t)=(1-3t,2-2t,3-2t) \quad \forall t \in [0,1]$.
    La imagen de $f\circ r$ es la parametrización de una curva en $\mathbb{R}^2$.
    $$\begin{aligned}(f\circ r)'(t)=&-3\frac{\partial f}{\partial x}(1-3t,2-2t,3-2t)-2\frac{\partial f}{\partial y}(1-3t,2-2t,3-2t)\\&-2\frac{\partial f}{\partial z}(1-3t,2-2t,3-2t) \quad \forall t \in [0,1].\end{aligned}$$
    Si existe y es no nulo, $(f\circ r)'(t)$ es el vector tangente a la curva parametrizada por $f\circ r$ en el punto $(f\circ r)(t)$.

12. (a) Vector tangente unitario: $T(2) = \frac{1}{\sqrt{41}}(2, 1, 6)$.

    Vector normal principal: no existe.

    (b) Vector tangente unitario: $T\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 0, 3)$.

    Vector normal principal: $N\left(\frac{\pi}{3}\right) = (0, 1, 0)$.

13. Para cada $t \in \mathbb{R}$, los vectores tangente unitario y normal principal en el punto $r(t)$ de la hélice, son respectivamente

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{9 + 16\pi^2}}(-4\pi \operatorname{sen} t, 4\pi \cos t, 3) \text{ y } N(t) = (-\cos t, -\operatorname{sen} t, 0).$$

    Y la ecuación vectorial del plano osculador en dicho punto es:

$$(x, y, z) = \left(2 \cos t - 2\alpha \operatorname{sen} t - \beta \cos t, 2 \operatorname{sen} t + 2\alpha \cos t - \beta \operatorname{sen} t, \frac{3t}{2\pi} + \frac{3\alpha}{2\pi}\right) \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

14. $T(t) = (-\operatorname{sen}^2 3t, \cos 3t, \operatorname{sen} 3t \cos 3t) \quad \forall t \in (0, \pi/3)$;

$$N(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 3t}}(-2 \operatorname{sen} 3t \cos 3t, -\operatorname{sen} 3t, \cos^2 3t - \operatorname{sen}^2 3t) \quad \forall t \in (0, \pi/3).$$

15. Se deduce de que $T'(t) = \left(\frac{-g'(t)g''(t)}{(1 + (g'(t))^2)^{3/2}}, \frac{g''(t)}{(1 + (g'(t))^2)^{3/2}}\right) \quad \forall t \in I$.

16. (a) $T(1) = \frac{1}{\left\|\frac{\partial h}{\partial x}(2, 1) + \frac{\partial h}{\partial y}(2, 1)\right\|}\left(\frac{\partial h}{\partial x}(2, 1) + \frac{\partial h}{\partial y}(2, 1)\right)$.

    (b) $s''(t) = 2\frac{\partial h}{\partial x}(2t, t^2) + 4\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(2t, t^2) + 8t\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(2t, t^2) + 4t^2\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(2t, t^2) \quad \forall t \in [0, 2]$.

17. Al cabo de 2 segundos, la partícula está en el punto $(4, 5, 6)$.

18. Vector de posición: $e(t) = (t + 2, t + 3, -4{,}9t^2 + 100t)$. Tiempo: $\frac{100}{4{,}9} \simeq 20{,}41$ seg.

    Coordenadas aproximadas: (22,41, 23,41, 0).

19. (a) $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$; (b) $4\sqrt{3}$; (c) $\frac{4}{27}(13\sqrt{13} - 8)$; (d) $\frac{\pi^2\sqrt{5}}{8}$.

20. (a) Puntos singulares: $s(x, y) = (x, y, 0)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x^2 + y^2 = \rho^2$.

    Vectores normales:

$$N(x, y) = \left(\frac{-x}{\sqrt{\rho^2 - x^2 - y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{\rho^2 - x^2 - y^2}}, 1\right) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x^2 + y^2 < \rho^2.$$

    (b) Único punto singular: $s(0, \theta) = (0, 0, 0)$ para todo $\theta \in [0, 2\pi]$. Vectores normales:

    $N(\rho, \theta) = -\rho \operatorname{sen} \phi \cdot (\cos \phi \cos \theta, \cos \phi \operatorname{sen} \theta, -\operatorname{sen} \phi) \quad \forall (\rho, \theta) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi]$.

    (c) No tiene puntos singulares. Vectores normales:

    $N(u, v) = (ab + b^2 \cos u) \cdot (\cos u \operatorname{sen} v, \cos u \cos v, \operatorname{sen} u) \quad \forall (u, v) \in [0, 2\pi]^2$.

    (d) Único punto singular: $s(0, 0) = (0, 0, 0)$. Vectores normales:

    $N(u, v) = (2v \operatorname{sen} v - 2u^2 \cos v, -2u^2 \operatorname{sen} v - 2v \cos v, u) \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

    (e) Único punto singular: $s(2, -2) = (0, 0, -4)$. Vectores normales:

    $N(u, v) = (4 - 2u, -4uv - 8u, 2u + 2v) \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 - \{(2, -2)\}$.

21. (a) Punto seleccionado: $s(0,0) = (0,0,-\rho)$. Vector normal: $N(0,0) = (0,0,1)$.

    Plano tangente: $z = -\rho$.

    Recta normal $(x,y,z) = (0,0,-\rho + t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$, que coincide con el eje z.

    (b) Punto seleccionado: $s(1,0) = (\operatorname{sen}\phi, 0, \cos\phi)$.

    Vector normal: $N(1,0) = (-\operatorname{sen}\phi\cos\phi, 0, \operatorname{sen}^2\phi)$.

    Plano tangente: $(-\cos\phi)x + (\operatorname{sen}\phi)z = 0$.

    Recta normal $(x,y,z) = (\operatorname{sen}\phi - t\operatorname{sen}\phi\cos\phi, 0, \cos\phi + t\operatorname{sen}^2\phi) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

    (e) Punto seleccionado: $s(0,0) = (0,0,0)$. Vector normal: $N(0,0) = (4,0,0)$.

    Plano tangente: $(x,y,z) = (0, t+s, 4s) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$.

    Recta normal $(x,y,z) = (4t,0,0) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

22. (a) $\pi r g$; (b) $2\pi r h$; (c) $4\pi^2 ab$.

23. π.

24. $4\pi(2-\sqrt{3})$.

25. (a) Parametrizaciones s_1 de S y s_2 de S':

    $$s_1(u,v) = (u, f(u)\operatorname{sen} v, f(u)\cos v) \quad \forall (u,v) \in [a,b]\times[0,2\pi];$$

    $$s_2(u,v) = (u\cos v, u\operatorname{sen} v, f(u)) \quad \forall (u,v) \in [a,b]\times[0,2\pi].$$

    (b) S es regular respecto de s_1 y S' es regular respecto de s_2 porque

    $$N_1(u,v) = f(u)(-f'(u), \operatorname{sen} v, \cos v) \neq (0,0,0) \quad \forall (u,v) \in [a,b]\times[0,2\pi] \quad \text{y}$$

    $$N_2(u,v) = u(-f'(u)\cos v, -f'(u)\operatorname{sen} v, 1) \neq (0,0,0) \quad \forall (u,v) \in [a,b]\times[0,2\pi]$$

    (c) $\text{Área}(S) = 2\pi \int_a^b f(u)\sqrt{1+(f'(u))^2}\,du$ y $\text{Área}(S') = 2\pi \int_a^b u\sqrt{1+(f'(u))^2}\,du$.

27. Dirección de máximo crecimiento y tasa de variación en esta dirección:

    $$\nabla T(0,0) = (1,1) \ \text{ y } \ \|\nabla T(0,0)\| = \sqrt{2}, \ \text{ respectivamente.}$$

    Dirección de máximo decrecimiento y tasa de variación en esta dirección:

    $$-\nabla T(0,0) = (-1,-1) \ \text{ y } \ -\|\nabla T(0,0)\| = -\sqrt{2}, \ \text{ respectivamente.}$$

28. Dirección de máximo crecimiento: $\nabla D(x_0,y_0,z_0) = -2ke^{-(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}(x_0,y_0,z_0)$, es decir, hacia el centro de la bola.

    Tasa de variación en esa dirección: $\|\nabla D(x_0,y_0,z_0)\| = 2ke^{-(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$.

    Dirección de máximo decrecimiento y tasa de variación en esta dirección: se obtienen cambiando el signo, como en el ejercicio 27.

29. Dirección de máxima pendiente (para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x^2+y^2 < 1$):

    $$\nabla f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}(-x,-y) \quad \text{(que apunta al } (0,0)\text{).}$$

    Y la pendiente en esa dirección es: $\|\nabla f(x,y)\| = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{1-x^2-y^2}}$.

30. $(x,y) = \left(1 + \dfrac{2t}{3}, 1+t\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

31. Recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$, para cada $x_0 \in I$ (I, intervalo abierto):

$$(x, y) = (x_0 + t, f(x_0) + f'(x_0) \cdot t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Recta normal en el punto $(x_0, f(x_0))$, para cada $x_0 \in I$:

$$(x, y) = (x_0 - f'(x_0) \cdot t, f(x_0) + t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Si $f(x) = 3x^2 - x + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, las ecuaciones anteriores quedan respectivamente como sigue. Para cada $x_0 \in \mathbb{R}$

$$(x, y) = (x_0 + t,\ 3x_0^2 - x_0 + 1 + (6x_0 - 1)t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{y}$$

$$(x, y) = (x_0 + (1 - 6x_0)t,\ 3x_0^2 - x_0 + 1 + t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Único punto de la gráfica de $f(x) = 3x^2 - x + 1$ ($x \in \mathbb{R}$) con recta normal vertical:

$$\left(\frac{1}{6}, -\frac{13}{12}\right).$$

32. Recta normal: $(x, y) = (3 - t, -1 + 3t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Recta tangente: $y = \dfrac{x}{3} - 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

34. La elipse E es una curva de nivel de f: $f(x, y) = 2a$. Como $\nabla f(x, y)$ es un vector normal a E para todo $(x, y) \in E$, entonces $\nabla f(x, y)$ es perpendicular al vector $T(x, y)$ (que es tangente a E en $(x, y) \in E$).

35. Hay dos posibles vectores: $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, -1)$ y $\dfrac{-1}{\sqrt{5}}(0, 2, -1)$.

36. Plano tangente: $5x + 4y + 3z = 22$.

Recta normal: $(x, y, z) = (1 + 5t, 2 + 4t, 3 + 3t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

37. Punto seleccionado: $(1, 1, 0) \in S$. Plano tangente: $x + 2z = 1$.

Recta normal: $(x, y, z) = (1 + t, 1, 2t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

38. Plano tangente: $x + 6y + z = 9$. Recta normal: $\left.\begin{array}{l} x = t, \\ y = 1 + 6t \\ z = 3 + t \end{array}\right\} \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

39. Un punto de dicha superficie es el $(0, 0, 0)$.

Plano tangente en el punto $(0, 0, 0)$: $x + y + z = 0$.

Recta normal en el punto $(0, 0, 0)$: $(x, y, z) = (t, t, t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ (o $x = y = z$).

40. Plano tangente en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, para cada (x_0, y_0) en el dominio de f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) - z + f(x_0, y_0) = 0.$$

Recta normal en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, para cada (x_0, y_0) en el dominio de f:

$$(x, y, z) = \left(x_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot t, y_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot t, f(x_0, y_0) - t\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Si $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, las ecuaciones anteriores quedan respectivamente como sigue. Para cada $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$3(y_0 - x_0^2)x + 3(x_0 - y_0^2)y - z = 3x_0y_0 - 2x_0^3 - 2y_0^3 \quad \text{y}$$

$$(x, y, z) = \big(x_0 + 3(y_0 - x_0^2)t, y_0 + 3(x_0 - y_0^2)t, 3x_0y_0 - x_0^3 - y_0^3 - t\big) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Puntos de la gráfica de $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$) con plano tangente horizontal: $(0, 0, 0)$ y $(1, 1, 1)$.

41. Vector normal obtenido a partir del ejemplo 8.24: $v_1 = -\frac{1}{2} \cdot (3, \sqrt{3}, -2)$.

    Vector normal obtenido a partir del ejemplo 8.27: $v_2 = -2\sqrt{3} \cdot (3, \sqrt{3}, -2)$.

    Vector normal obtenido a partir de la sección 8.7.2: $v_3 = 2 \cdot (3, \sqrt{3}, -2)$.

42. (a) Basta comprobar que $F(r(t)) = -26$ y que $(0, \sqrt{5}, 6) = r(2)$.

    (b) Vector normal a S en $(0, \sqrt{5}, 6)$: $(0, 4\sqrt{5}, -12)$.

    (c) $T'(2) = \frac{1}{19\sqrt{95}}(-27, -18\sqrt{5}, 27)$.

    (d) $T'(2)$ no es normal a S en $(0, \sqrt{5}, 6)$, aunque sí lo sea a la curva C (contenida en S y que también pasa por ese punto). $T'(2)$ es ortogonal al vector tangente a C en $(0, \sqrt{5}, 6)$, que pertenece al plano tangente a S en dicho punto, pero no tiene que ser ortogonal a todo vector de ese plano tangente (si lo fuera, entonces sí sería normal a S).

43. La trayectoria puede parametrizarse mediante la función $r(t) = (-2e^{2t}, e^{-2t})$, definida en $[0, \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}]$. Su representación equivale a la de la función $y = -\frac{2}{x}$ en el intervalo $[-5, 2]$: se muestra en la figura 1 dentro de la representación de la placa.

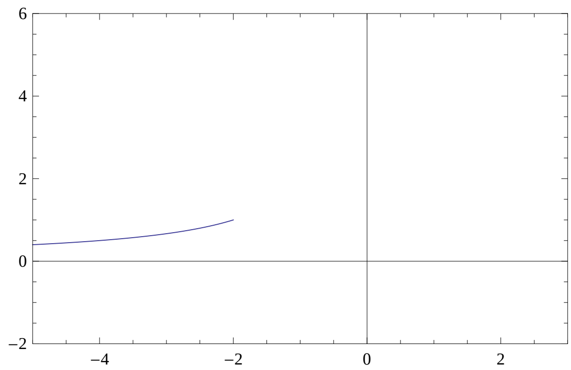

Figura 1: Ejercicio 43

44. La trayectoria puede parametrizarse mediante la función $r(t) = (2e^{4t}, 4e^{2t})$, definida en $[0, \frac{\ln 5}{4}]$. La trayectoria termina en el punto $(10, 4\sqrt{5})$. Su representación equivale a la de la función $y = \sqrt{8x}$ en el intervalo $[2, 10]$.

45. (a) Parametrización de la trayectoria: $r(t) = (e^{-2t}, -2e^{-6t}, e^{-4t} + 12e^{-12t}) \quad \forall t \geq 0$.

    (b) Parametrización de la trayectoria: $r(t) = (e^{-2t}, e^{-6t}, e^{-4t} + 3e^{-12t}) \quad \forall t \geq 0$.

46. La trayectoria puede parametrizarse mediante la función $r(t) = \left(\operatorname{tg}(3t + \frac{\pi}{4}), 2 - t\right)$, definida en el intervalo $[0, \frac{\pi}{12}]$. La trayectoria coincide con la gráfica de la función $g(x) = 2 + \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} x$, definida en $[1, \infty)$. La asíntota de la trayectoria de máximo crecimiento es la recta $y = 2 - \frac{\pi}{12}$.

Capítulo 9

Sección 9.1

1. $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} \times [0, \infty)$. Curvas de nivel: $y = k - 4x^2 \quad \forall k \in [0, \infty)$.

2. Para cada $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3$ hay dos líneas de flujo cuya parametrización es

$$r(t) = \Big(\frac{-1}{t+k_1}, k_2 + e^{k_3} t, k_3\Big),$$

una con dominio $(-\infty, -k_1)$ y otra con dominio $(-k_1, \infty)$. Las líneas de flujo contenidas en el plano $z = 0$ son las parametrizadas por

$$r(t) = \Big(\frac{-1}{t+k_1}, k_2 + t, 0\Big)$$

(con los dos posibles dominios mencionados), para cualesquiera $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Sección 9.2

1. (a) $\Delta a(x,y,z) = 0 \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$;

   (b) $\Delta b(x,y,z) = 2y^3 + 6x^2y + 6z \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$;

   (c) $\Delta c(x,y,z) = \cos\sqrt{x^2+y^2+z^2} - \dfrac{2\operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

2. (a) $\operatorname{rot} A(x,y,z) = (0,0,0)$ y $\operatorname{div} A(x,y,z) = 2x + 2y + 2z \;\; \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$;

   (b) $\operatorname{rot} B(x,y,z) = (1,1,0)$ y $\operatorname{div} B(x,y,z) = -x \operatorname{sen} y \;\; \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$;

   (c) $\operatorname{rot} C(x,y,z) = (0, z^2 \operatorname{sen}(xz^2), -y \operatorname{sen} xy - xe^{xy})$ y
   $\operatorname{div} C(x,y,z) = ye^{xy} - x \operatorname{sen} xy - 2xz \operatorname{sen}(xz^2) \;\; \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$;

   (d) $\operatorname{rot} D(x,y,z) = (0,0,0)$ y $\operatorname{div} D(x,y,z) = f'(x) + g'(y) + h'(z) \;\; \forall (x,y,z) \in I^3$;

   (e) $\operatorname{rot} E(x,y) = (0,0,-y \operatorname{sen} xy - xe^{xy})$ y $\operatorname{div} E(x,y) = ye^{xy} - x \operatorname{sen} xy \;\; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$;

   (f) $\operatorname{rot} F(x,y) = (0,0,0)$ y $\operatorname{div} F(x,y) = 0 \;\; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

3. (a) Son irrotacionales los campos A, D y F;

   (b) Es incompresible el campo F (y el campo D, cuando es constante).

Sección 9.3.3

1. 24π.

2. $\dfrac{4}{15}(9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} + 1) \simeq 1{,}4066$.

Sección 9.4.3

1. $20\sqrt{2} - 50\pi$.

2. $\dfrac{\pi}{2}$, orientando S hacia arriba.

Sección 9.5.5

1. (a) $A(x,y) = \big(2(\cos 2x)(\cos 5y), -5(\operatorname{sen} 2x)(\operatorname{sen} 5y)\big) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$;

   (b) $B(x,y,z) = \Big(\dfrac{z}{x^2} + \dfrac{2z}{y}, \dfrac{1}{2z} - \dfrac{2xz}{y^2}, -\dfrac{y}{2z^2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{2x}{y}\Big) \quad \forall (x,y,z) \in (\mathbb{R}^+)^3$;

   (c) $C(x,y,z) = \Big(\dfrac{yz}{1+x^2z^2}, \operatorname{arc\,tg} xz, \dfrac{xy}{1+x^2z^2}\Big) \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

2. (a) $\operatorname{sen} 2 \cos 15 \simeq -0,690782$; (b) $-\dfrac{53}{12} \simeq -4{,}4167$; (c) $10 \operatorname{arc\,tg} 2 \simeq 11{,}0715$.

3. F es conservativo en $\mathbb{R}^3$.

   La función potencial pedida es $f(x,y,z) = (x^2 - xz + \cos z)y - 1 \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

4. F es un campo conservativo en cualquier subconjunto abierto y conexo en el que pueda definirse. Los dominios más amplios en que es conservativo es en cada uno de los cuatro cuadrantes abiertos del plano.

Sección 9.6.4

1. $\dfrac{963}{5} = 192{,}6$.
2. 0.
3. $\dfrac{2\pi}{3}$.

Sección 9.7

1. Las curvas de nivel son todas las circunferencias con centro en $(0,0)$.

2. Las curvas de nivel son todas las superficies esféricas con centro en $(0,0,0)$.

3. (a) Parametrización de todas las líneas de flujo:

   $$r(t) = \Big(Ke^t, \frac{K^2e^{2t}}{2} + M\Big) \quad \forall K, M \in \mathbb{R} \text{ y } \forall t \in \mathbb{R}.$$

   Si $K = 0$ la línea de flujo se reduce a un punto. Si $K \neq 0$ la línea de flujo coincide con la gráfica de la función $y = \frac{x^2}{2} + M$, con dominio $[K, \infty)$ si $K > 0$, o con dominio $(-\infty, K]$ si $K < 0$.

   (b) Parametrización de todas las líneas de flujo:

   $$r(t) = \Big(t + K, \frac{-1}{t+M}\Big) \quad \forall K, M \in \mathbb{R} \ \ \text{(el dominio dependerá de } M\text{)}.$$

   El modo de resolver el ejercicio ha hecho que se pierda una línea de flujo en la expresión anterior: el eje x recorrido de izquierda a derecha, que se puede parametrizar por $r_0(t) = (t,0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Fuera de este caso, la parametrización de la línea de flujo que pasa por un punto (a,b) $(b \neq 0)$ es

   $$r(t) = \Big(t + a, \frac{-1}{t - \frac{1}{b}}\Big) = \Big(t + a, \frac{b}{1 - bt}\Big),$$

   cuyo dominio es el intervalo que contenga al 0 entre los dos posibles $(-\infty, 1/b)$ o $(1/b, \infty)$; es decir, $(-\infty, 1/b)$ si $b > 0$, y $(1/b, \infty)$ si $b < 0$. Así, las parametrizaciones de las líneas de flujo pedidas son, respectivamente:

$$
\begin{aligned}
r_1(t) &= \Big(t-2, \frac{1}{2-t}\Big) \quad \forall t \in (-\infty, 2) \quad (\text{caso } (a,b) = (-2, 1/2));\\
r_2(t) &= \Big(t+1, \frac{-1}{t+2}\Big) \quad \forall t \in (-2, \infty) \quad (\text{caso } (a,b) = (1, -1/2));\\
r_3(t) &= \Big(t+1, \frac{1}{1-t}\Big) \quad \forall t \in (-\infty, 1) \quad (\text{caso } (a,b) = (1, 1));\\
r_4(t) &= \Big(t-2, \frac{-1}{t+1}\Big) \quad \forall t \in (-1, \infty) \quad (\text{caso } (a,b) = (-2, -1));\\
r_5(t) &= r_0(t) = (t, 0) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (\text{caso } (a,b) = (-3, 0)).
\end{aligned}
$$

La representación de la línea de flujo parametrizada por r_5 es trivial. Las líneas de flujo parametrizadas por r_1, r_2, r_3 y r_4 coinciden respectivamente con las gráficas de las siguientes funciones:

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= -\frac{1}{x} \quad \forall x \in (-\infty, 0); \qquad y_2(x) = -\frac{1}{x+1} \quad \forall x \in (-1, \infty);\\
y_3(x) &= -\frac{1}{x-2} \quad \forall x \in (-\infty, 2); \qquad y_4(x) = -\frac{1}{x+3} \quad \forall x \in (-3, \infty).
\end{aligned}
$$

(c) Las líneas de flujo son semirrectas que terminan en el origen $(0, 0)$.

5. (a) $1+\sqrt{2}$; (b) $3\pi|a|^3$; (c) $(2\pi^2+4\pi^4)|a|^3$; (d) $\frac{1}{3}[(2+t_0^2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}]$;

   (e) $\frac{5\sqrt{5}-1}{12}$; (f) $\frac{1}{3}\Big(2\sqrt{2} - \frac{(\sqrt{1+e^2})^3}{e^3}\Big)$; (g) $4 + \frac{11\sqrt{2}+5\sqrt{5}}{3}$.

6. 5π.

7. $2\sqrt{6}-\sqrt{3}$.

8. (a) ; (b) $\frac{2\pi}{3\omega^3}[(h^2+\omega^2)^{\frac{3}{2}} - h^3]$; (c) $\frac{4\pi^6}{5} + \frac{5\pi^4}{3}$;

   (d) ; (e) $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$; (f) $36+12\pi$.

9. $\frac{43}{3}$.

10. (A) $-\frac{14}{15}$; (B) $-2\pi a^2$; (C) $\frac{1}{35}$; (D) 40; (E) -2π; (F) 0.

11. 8π.

14. (A) $-\frac{4\pi}{3}$; (B) $\frac{4\pi}{3}$; (C) $-\frac{1}{2}$; (D) $\frac{1}{2}$; (E) $\frac{3\pi}{2}$; (E) $\frac{7}{3}$.

15. $\frac{16\pi}{3}$. Atraviesa la superficie de abajo hacia arriba.

16. (a) $\frac{17}{12}$; (b) $-\frac{17}{12}$; (c) $-\frac{17}{12}$; (d) $\frac{59}{42}$.

17. 1.

18. (A) $a(x,y) = (x^2+1)y$; (B) no conservativo; (C) $c(x,y) = \frac{x}{y}$;

    (D) no conservativo; (E) $\varepsilon(x,y) = e^x \cos y$; (F) $f(x,y,z) = \frac{x^2+2y^2+3z^2}{2}$;

(G) $g(x,y,z) = xye^z$; (H) no conservativo; (I) $i(x,y,z) = \dfrac{y(3x^2+y^2+3z^2)}{3}$;

(J) $j(x,y,z) = z + \dfrac{\ln(x^2+y^2)}{2}$; (K) $k(x,y,z) = x^2y - \dfrac{y^2}{2} + \cos z$.

19. Por ejemplo, $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(2,-3)} A(x,y)\,dr = a(2,-3) - a(1,1) = -17.$

20. Se debe elegir una curva cerrada que rodee, es decir, que tenga en su interior al punto que no está en el dominio de F (el $(0,0)$): por ejemplo, si $r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, con $t \in [0, 2\pi]$, la integral de F sobre la circunferencia parametrizada por r es $2\pi \neq 0$.

21. (a) Es conservativo porque su rotacional es nulo y su dominio es convexo.

    (b) $f(x,y,z) = x \operatorname{sen} z - yz$. (c) $3 - \operatorname{sen} 2$.

    (d) La integral vuelve a salir $3 - \operatorname{sen} 2$ en todo caso (por ejemplo, tómese el segmento que une los dos puntos, con la orientación indicada).

22. (A) $\dfrac{1}{4}$; (B) $-\dfrac{104}{3}$; (C) $\dfrac{4}{3}$; (D) 0; (E) $\dfrac{3}{2}$; (F) 56; (G) 10π; (H) $-\dfrac{1}{12}$.

23. Es seguro ninguno de los campos del ejercicio 22 —excepto quizás el D— es conservativo, puesto que se ha mostrado que la integral de esos campos sobre una curva cerrada regular a trozos es distinta de cero.

24. Hay dos formas de hacer el ejercicio 22, aplicando o no el teorema de Green.

25. El área encerrada por la elipse es πab.

26. (A) $\dfrac{3\pi}{2}$; (B) -2π; (C) 4π; (D) $-\dfrac{243}{4}$.

27. (a) 0; (b) $-\pi$; (c) -4.

28. 8π si la orientación de la curva se corresponde con el sentido antihorario en su proyección sobre el plano xy.

29. Si se proyecta la curva C de cada apartado sobre el plano xy, el sentido con que se recorre la curva C se corresponde con el siguiente sentido de su proyección: (a) horario; (b) antihorario; (c) horario.

30. (a) 31,5; (b) 12π.

31. El resultado de la integral es 0.

32. El resultado de la integral es: (F) 3; (G) 2; (H) 3.

33. (F) 0; (K) $\dfrac{4\pi}{3}$; (H) 4π.

34. (a) 144π; (b) -16π; (c) 128π; (d) 128π.

36. -56π.