Matemáticas ITA. 30 de junio 2007.
Mecanización, Explotaciones y Horto.

Apellidos: **Nombre:**

Primer Parcial

1. *a*) Determine dos matrices A y B tales que

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}; \quad -A + 2B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

   b) Calcule el valor de x de manera que el determinante de la siguiente matriz valga 0,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & x & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & x & x \end{pmatrix}$$

   c) Discuta el sistema

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ ty + z = 0 \\ x + (1+t)y + tz = t + 1 \end{array}\right\}$$

   en función del parámetro t y resuelvalo en los casos en que tenga solución.

2. *a*) Calcule el valor de a para que

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + ax + 1} - (x + 2)) = 0.$$

   b) Un fabricante recibe la orden de fabricar sillas de madera que puede producir en dos lugares distintos A y B. La función de coste de la producción es

$$C(x, y) = 0{,}25x^2 + 10x + 0{,}15y^2 + 12y$$

   donde x e y denotan el número de sillas producidas en cada lugar A y B respectivamente. Calcule la derivada direccional de la función coste si se fabrican 400 en A y 2000 en B según la dirección de su vector gradiente (es decir, en el punto $P = (400, 2000)$).

3. El gasto mensual de una familia en función de su renta x viene dado por la función:

$$R(x) = \begin{cases} 200 + \dfrac{3x}{5} & \text{si } 0 \le x \le 1000, \\ \dfrac{1000x}{x + 250} & \text{si } x > 1000. \end{cases}$$

   a) Estudie la continuidad de la función $R(x)$.

   b) Calcule los extremos relativos y absolutos de $R(x)$.

   c) Estudie la concavidad y convexidad de $R(x)$.

   d) Calcule el $\lim_{x\to\infty} R(x)$.

4. Estudie la continuidad de la siguiente función en el punto $(0,0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} y \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} + x \cos \dfrac{1}{y} & \text{si } x, y \neq 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

5. Se supone que f es integrable en las regiones que se proponen en las siguientes integrales:

$$\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} f(x,y)\, dxdy, \qquad \int_1^4 \int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)\, dydx.$$

Dibuje la región sobre la que se integra en cada caso e invierta el orden de integración.

Segundo Parcial

6. Calcule una base del subespacio vectorial de las soluciones del sistema homogeneo siguiente según los valores de t

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 0 \\ ty + z = 0 \\ x + (1+t)y + tz = 0 \end{array}\right\}$$

7. Sea y la temperatura de un objeto situado en un recipiente cuya temperatura se conserva constante a 60^o. Si la temperatura del objeto baja de 100^o a 90^o en 10 minutos, ¿cuánto tiempo se requerirá para bajar la temperatura a 80^o? Téngase en cuenta que por la ley de enfriamiento de Newton el ritmo de cambio en y es proporcional a la diferencia entre y y 60.

8. *a*) Represente la superficie cilíndrica S parametrizada por $S(\theta, y) = (2+2\cos\theta, y, 2\operatorname{sen}\theta)$; $\theta \in [0, 2\pi]$, $y \in \mathbb{R}$.

   b) Compruebe que la curva C parametrizada por $r(\theta) = (2 + 2\cos\theta, 2\theta, 2\operatorname{sen}\theta)$; $\theta \in [0, 10\pi]$ está contenida en la superficie cilíndrica S y dibújela.

   c) Calcule la longitud de la curva C.

   d) Estudie si la curva C es regular según la parametrización r.

   e) Obtenga la ecuación del plano osculador en cualquier punto genérico $r(\theta_0) = (2 + 2\cos\theta_0, 2\theta_0, 2\operatorname{sen}\theta_0)$.

   f) Demuestre que el vector $r''(\theta)$ es normal a la curva en cualquier punto $r(\theta)$ para todo $\theta \in [0, 10\pi]$.

9. Sea S la gráfica de la función $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 - 2$ definida en $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$. Calcule la integral sobre S del campo $F(x,y,z) = (y,x,z)$ orientando la gráfica hacia arriba.

10. Calcule la integral del campo $F(x,y) = (y, 2x)$ sobre la frontera del recinto acotado R limitado por un cuadrado de extremos $(2,0)$, $(0,2)$, $(-2,0)$ y $(0,-2)$ y la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1. Tómese orientación derecha para la frontera del recinto.

Los alumnos que se examinan de toda la asignatura deben de realizar las preguntas 1,3,5,7,8,10.
Puntuación de las preguntas: Todas tienen la misma puntuación.
Tiempo: 3 horas para el examen completo y 2 horas y media para los parciales.

Almería, 30 de junio de 2007