Ejemplo de Linealización. Sistema de dos tanques

José Luis Guzmán Sánchez

30 de septiembre de 2015

El objetivo de este documento es mostrar un ejemplo de linealización basado en el modelo no lineal del proceso de dos tanques acoplados que se muestra en la Figura 1. Este modelo tiene como fin representar la dinámica de la altura del tanque inferior, $h_1(t)$, con respecto al caudal de la bomba 1, $q_1(t)$, y a la influencia del tanque superior, que en su defecto se puede representar como la influencia del caudal de la bomba 2, $q_2(t)$, a través de la dinámica de dicho tanque superior.

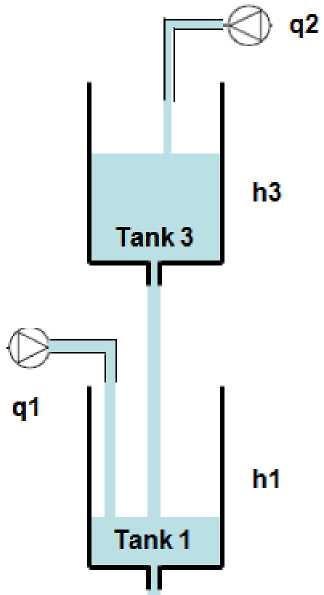

Figura 1: Sistema de dos tanques con sección de descarga

Las ecuaciones diferenciales no lineales que describen este proceso considerando que son tanques de descarga son las siguientes:

$$\frac{dh_3(t)}{dt} = -\frac{a_3}{A_3}\sqrt{2gh_3(t)} + \frac{q_2(t)}{A_3} \quad (1)$$

$$\frac{dh_1(t)}{dt} = -\frac{a_1}{A_1}\sqrt{2gh_1(t)} + \frac{a_3}{A_1}\sqrt{2gh_3(t)} + \frac{q_1(t)}{A_1} \quad (2)$$

donde $h_1(t)$, $h_3(t)$ son las alturas de los tanques 1 y 3; $q_1(t)$, $q_2(t)$ son los caudales de las bombas de entrada; A_1, A_3 son el área de los tanques; a_1, a_3 el área de la sección de descarga de cada tanque, y g es la gravedad.

El objetivo de este documento consiste en obtener la versión linealizada de dicho modelo en torno a un punto de operación determinado que viene caracterizado por valores constantes de las distintas variables, h_1^o, h_3^o, q_1^o, and q_2^o. Estos valores determinan un punto de equilibro alrededor del cual se desea obtener una aproximación lineal del sistema.

La primera etapa en el proceso de linealiración consiste en realizar un **análisis en estado estacionario** de las ecuaciones (1) y (2) en el punto de operación establecido (h_1^o, h_3^o, q_1^o, q_2^o), resultando en $\left(\frac{dh_1^o}{dt} = 0 \text{ y } \frac{dh_3^o}{dt} = 0\right)$:

$$q_2^o = a_3\sqrt{2gh_3^o} \tag{3}$$

$$\frac{a_1}{A_1}\sqrt{2gh_1^o} = \frac{1}{A_1}q_1^o + \frac{1}{A_1}q_2^o \tag{4}$$

Antes de proceder a la linealización del modelo propuesto, es necesario tener en mente que el objetivo de la misma consiste en obtener una versión lineal del sistema en torno al punto de operación deseado (h_1^o, h_3^o, q_1^o, q_2^o), tal y como se comentó anteriormente. Por tanto, las variables del sistema se podrán entonces interpretar como **nueva variables lineales** ($\bar{h}_1(t)$, $\bar{h}_3(t)$, $\bar{q}_1(t)$, $\bar{q}_2(t)$) a partir del punto de trabajo escogido. De esta forma se tiene que:

$$q_1(t) = q_1^o + \bar{q}_1(t) \tag{5}$$

$$q_2(t) = q_2^o + \bar{q}_2(t) \tag{6}$$

$$h_1(t) = h_1^o + \bar{h}_1(t) \tag{7}$$

$$h_3(t) = h_3^o + \bar{h}_3(t) \tag{8}$$

Considérensen los siguientes cambios de variable que serán utilizados a lo largo del documento para simplificar la representación:

$$T_i = \frac{A_i}{a_i}\sqrt{\frac{2h_i^o}{g}}\ ,\ c_i = \frac{T_i}{A_i}, \quad i = 1,3 \tag{9}$$

Linearización tanque superior. Por motivos de simplicidad en el desarrollo del modelo lineal, se comenzará linealizando la ecuación (1) que relaciona la altura del tanque superior, $h_3(t)$, con el caudal de entrada de la bomba 2, $q_2(t)$.

En primer lugar se aplicar el desarrollo en serie de Taylor de primer orden a la parte no lineal del modelo (1), lo cual resulta en

$$\sqrt{2gh_3(t)}\Big|_{h_3^o} = \sqrt{2gh_3^o} + \frac{g}{\sqrt{2gh_3^o}}\underbrace{(h_3(t) - h_3^o)}_{\bar{h}_3(t)} \tag{10}$$

A continuación, sustituyendo en (1) la nueva representación de las variables descritas por (6) y (8), los valores en estado estacionario (3) y el resultado de la linealización expuesto en (10), se obtiene que:

$$\frac{d\bar{h}_3(t)}{dt} + \frac{d\bar{h}_3^o}{dt} = -\frac{a_3}{A_3}\sqrt{2gh_3^o} - \frac{a_3}{A_3}\sqrt{\frac{g}{2h_3^o}}\bar{h}_3(t) + \frac{a_3}{A_3}\sqrt{2gh_3^o} + \frac{\bar{q}_2(t)}{A_3} \quad (11)$$

que simplificando resulta en:

$$\frac{d\bar{h}_3(t)}{dt} = -\frac{a_3}{A_3}\sqrt{\frac{g}{2h_3^o}}\bar{h}_3(t) + \frac{\bar{q}_2(t)}{A_3} \quad (12)$$

Haciendo uso del cambio de variable descrito en (9), se obtiene que:

$$T_3\frac{d\bar{h}_3(t)}{dt} + \bar{h}_3(t) = c_3\bar{q}_2(t) \quad (13)$$

Nótese que la ecuación diferencial resultante es una ecuación diferencial lineal de primer orden. Finalmente, aplicando la Transformada de Laplace a dicha ecuación diferencial, se obtiene que la función de transferencia que relaciona la altura del tanque superior con respecto al caudal de entrada de la bomba dos entorno al punto de operación h_3^o, q_2^o viene dada por:

$$\frac{\bar{H}_3(s)}{\bar{Q}_2(s)} = \frac{c_3}{T_3s+1} \quad (14)$$

Linearización tanque inferior. En este caso se procede a la linealización de la ecuación (2).

Al igual que en el caso anterior, se comienza con la linealización de los elementos no lineales. Para ello, se aplica de nuevo el desarrollo en serie de Taylor de primer orden a las parte no lineales del modelo (2), lo cual resulta en

$$\sqrt{2gh_1(t)}\Big|_{h_1^o} = \sqrt{2gh_1^o} + \frac{g}{\sqrt{2gh_1^o}}\underbrace{(h_1(t)-h_1^o)}_{\bar{h}_1(t)} \quad (15)$$

$$\sqrt{2gh_3(t)}\Big|_{h_3^o} = \sqrt{2gh_3^o} + \frac{g}{\sqrt{2gh_3^o}}\underbrace{(h_3(t)-h_3^o)}_{\bar{h}_3(t)} \quad (16)$$

A continuación, sustituyendo en (2) la nueva representación de las variables (5)-(8), los valores en estado estacionario (3)-(4) y el resultado de la linealización expuesto en (15)-(16), se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{h}_1(t)}{dt} + \frac{d\bar{h}_1^o}{dt} &= -\frac{a_1}{A_1}\sqrt{2gh_1^o} - \frac{a_1}{A_1}\sqrt{\frac{g}{2h_1^o}}\bar{h}_1(t) + \frac{a_3}{A_1}\sqrt{2gh_3^o} + \quad (17)\\ &+\frac{a_3}{A_1}\sqrt{\frac{g}{2h_3^o}}\bar{h}_3(t) + \frac{a_1}{A_1}\sqrt{2gh_1^o} - \frac{a_3}{A_1}\sqrt{2gh_3^o} + \frac{\bar{q}_1(t)}{A_1}\end{aligned}$$

que simplificando resulta en:

$$\frac{d\bar{h}_1(t)}{dt} = -\frac{a_1}{A_1}\sqrt{\frac{g}{2h_1^o}}\bar{h}_1(t) + \frac{a_3}{A_1}\sqrt{\frac{g}{2h_3^o}}\bar{h}_3(t) + \frac{\bar{q}_1(t)}{A_1} \quad (18)$$

Haciendo uso del cambio de variable descrito en (9), se obtiene que:

$$T_1 \frac{d\bar{h}_1(t)}{dt} + \bar{h}_1(t) = \frac{c_1}{c_3}\bar{h}_3(t) + c_1\bar{q}_1(t) \tag{19}$$

Aplicando la Transofrmada de Laplace a la ecuación diferencial resultante se obtiene que:

$$sT_1\bar{H}_1(s) + \bar{H}_1(s) = \frac{c_1}{c_3}\bar{H}_3(s) + c_1\bar{Q}_1(s) \tag{20}$$

Finalmente, sustituyendo $\bar{H}_3(s)$ desde la ecuación (14), se obtiene la función función de transferencia resultante:

$$\bar{H}_1(s) = \frac{c_1}{T_1 s + 1}\bar{Q}_1(s) + \frac{c_1}{(T_1 s + 1)(T_3 s + 1)}\bar{Q}_2(s) \tag{21}$$