CELULARIZACIÓN Y NULIFICACIÓN DE PREHACES SIMPLICIALES

Trabajo conjunto con Frank Neumann

SECA II

GRANADA, 17 de septiembre de 2004

www.ual.es/∼jlrodri

1. Motivación

$k =$ cuerpo (algebraicamente cerrado).
$MV_* =$ categoría motívica punteada (inestable) de Morel y Voevodsky.

MV_* admite una estructura de modelos cerrada que nos permite hacer teoría de homotopía a partir de esquemas, donde la recta afín $\mathbb{A}^1$ juega el papel del intervalo unidad.

Morel–Voevodsky, Jardine, Goerss–Jardine:
Dicha estructura puede obtenerse localizando respecto de un punto racional $f : * \to \mathbb{A}^1$, la categoría de modelos de haces simpliciales sobre el sitio de Nisnevich $(Sm/S)_{Nis}$ de los esquemas lisos de tipo finito sobre un esquema noetheriano S.

Por ejemplo, si $S = \mathrm{Spec}\,(k) = *$, $Sm/S = Sm_k$, la categoría de las variedades algebraicas lisas sobre k.

Dugger e Isaksen, 2003:

Consideran motivos "celulares" tanto inestables como estables, construidos a partir de las esferas bigraduadas $S^{p,q}$ y conos sobre ellas usando colímites homotópicos punteados y equivalencias débiles (de modo similar a como un CW-complejo se construye a partir de las esferas).

En particular, construyen una "aproximación celular" para el caso estable (aunque no es funtorial). No lo hacen para el caso inestable.

Recordemos que:

$$S^{p,q} := S^{1,0} \wedge \overset{p-q}{\cdots} \wedge S^{1,0} \wedge S^{1,1} \wedge \overset{q}{\cdots} \wedge S^{1,1}$$

donde $S^{1,0} = S^1$, la circunferencia simplicial $\Delta^1/\partial[\Delta^1]$ y $S^{1,1} = \mathbb{A}^1 - 0$, es la circunferencia de Tate (la versión geométrico algebraica de la circunferencia).

Por ejemplo, $S^{2,1} = S^{1,0} \wedge S^{1,1} \simeq \mathbb{A}^1/(\mathbb{A}^1 - 0) \simeq \mathbb{P}^1$ la recta proyectiva.

La categoría Spectra(MV) de espectros motívicos se obtiene estabilizando respecto de $\mathbb{P}^1$.

Algunos ejemplos:

- $\mathbb{A}^n - 0$, $\mathbb{P}^n$ son celulares.
- GL_n, $Gr_m(\mathbb{A}^n)$ y $V_m(\mathbb{A}^n)$ son celulares establemente.

  No se sabe si son celulares inestables.
- KGL y MGL son espectros motívicos celulares,

  donde KGL es el espectro de teoría K algebraica y MGL es el espectro de cobordismo algebraico, que juegan el papel análogo al del espectro K en teoría K topológica y el espectro MU de cobordismo complejo en teoría de homotopía clásica.

2. Objetivos

- Construir un funtor de celularización en MV_*.
- Mejorar algunos resultados de Dugger y Isaksen.

Para ello contamos con las siguientes herramientas:

- Bousfield (1977), Farjoun y Chachólski (1990-95):
  f-localización y A-celularización para conjuntos simpliciales.
- Nofech (1999), Hirschhorn (2002):
  celularización en categorías de modelos cerradas simpliciales.
- Goerss–Jardine (1998):
  f-localización para haces simpliciales sobre un sitio pequeño de Grothendieck.

3. Celularización y nulificación en espacios

SS categoría de conjuntos simpliciales (= *espacios*).

$\mathbf{SS}_*$ categoría de conjuntos simpliciales punteados.

Bousfield (1977-?), Farjoun, Chachólski (1990-?):

Una **clase cerrada** $\mathcal{C}$ es una clase de espacios conexos en **SS** que cumple:

- $X \in \mathcal{C}$ y $X \simeq Y$ en **SS** entonces $Y \in \mathcal{C}$.
- Si D es una categoría pequeña, y $F : D \to \mathbf{SS}_*$ es un diagrama sobre D con valores en $\mathcal{C}$, entonces

$$hocolim_* F \in \mathcal{C}.$$

Dado un espacio A, denotamos por $\mathcal{C}(A)$ a la clase cerrada generada por A.

- Los espacios de $\mathcal{C}(A)$ se llaman A-*celulares*.
- Una aplicación $h : X \to Y$ se dice que es una A-*equivalencia* si induce una equivalencia débil

$$h_* : Map(A, X) \to Map(A, Y).$$

entre los correspodientes espacios de aplicaciones.

(Bousfield, Farjoun): Todo espacio X admite una *aproximación A-celular*, esto es una aplicación

$$c : Cell_A(X) \to X$$

donde $Cell_A(X)$ es A-celular y c es una A-equivalencia. En esencia, $Cell_A(X)$ recoge la información de X que tiene que ver con A.

Ejemplo: Los espacios S^{n+1}-celulares son los espacios n-conexos, y las aproximaciones celulares son los recubridores n-conexos.

Dualmente, existe una teoría homotópica “módulo A”, que recoge la parte de X que no tiene que ver con A.
Esto se consigue convirtiendo la aplicación $f : * \to A$ en una equivalencia:
Un espacio Z se dice *A-nulo* o *f-local*, si

$$Map(A, Z) \simeq Map(*, Z).$$

Una aplicación $g : X \to Y$ se dice que es una equivalencia f-local, si g induce una equivalencia débil

$$g^* : Map(Y, Z) \to Map(X, Z)$$

para todo espacio f-local Z.

Bousfield, Farjoun: Todo espacio X admite una f-localización (o A-nulificación) natural

$$l : X \to L_f X$$

tal que $L_f X$ es f-local, y l es una equivalencia f-local.

Ejemplo: Los espacios S^{n+1}-nulos son las n-secciones de Postnikov y $X \to L_f X$ la n-sección.

Aviso: no me he preocupado de tomar aproximaciones fibrantes de Kan.

El modo más sistemático de construir tales funtores es usando la maquinaria de Quillen de categorías de modelos.

4. Categorías de modelos celulares

$\mathcal{C}$= categoría de modelos cerrada, simplicial y punteada.
A un objeto cofibrante de $\mathcal{C}$. $\mathbf{Hom}(X,Y)$ el complejo simplicial de funciones. X_f aproximación fibrante de X.

Una **estructura de categoría de modelos cerrada** A**-celular** sobre $\mathcal{C}$ es una estructura de categoría de modelos cerrada $\mathcal{C}^A$ sobre la categoría subyacente de $\mathcal{C}$ donde:
$\mathbf{W}_{\mathcal{C}^A} = \{\phi : \mathbf{Hom}(A, \phi_f) \in \mathbf{W_{SS}}\} =$ (A-equivalencias).
$\mathbf{F}_{\mathcal{C}^A} = \mathbf{F}_{\mathcal{C}}$,
$\mathbf{C}_{\mathcal{C}^A} = \{j : j$ tiene la "LLP" con respecto a $(\mathbf{W}_{\mathcal{C}^A} \bigcap \mathbf{F}_{\mathcal{C}^A})\}$, (=$A$-cofibraciones).

Teorema: [Nofech] *Sea $\mathcal{C}$ una cateoría de modelos cerrada, punteada, simplicial y propia, con colímites arbitrarios, y con un conjunto $\{t_j\}$ de generadores de cofibraciones triviales. Sea A un objeto cofibrante pequeño de $\mathcal{C}$. Entonces existe una estructura $\mathcal{C}^A$ de categoría de modelos cerrada A-celular que admite factorizaciones funtoriales.*

Así, toda aplicación $f : X \to Y$ admite una factorización natural

$$X \to Z \to Y,$$

donde la primera es una A-cofibración y la segunda es una fibración que es A-equivalencia.

En particular, factorizando $* \to Y$ obtenemos

$$* \to Cell_A Y \to Y,$$

que nos da un funtor $Cell_A$ de A-celularización en $\mathcal{C}$.

Si factorizamos $X \to *$ obtenemos

$$X \to P_A X \to *,$$

que nos da un funtor P_A de A-nulificación en $\mathcal{C}$.

5. Esquemas

Sea X_τ la categoría de abiertos de un espacio X donde

- Objetos: inclusiones de abiertos $U \hookrightarrow X$;
- Morfismos: un único morfismo $U \to V$ por cada inclusión $U \subseteq V$.

En esta categoría tenemos las nociones usuales de intersección de abiertos y de cubrimientos de abiertos.

Un **prehaz** sobre un espacio topológico X con valores en una categoría D es un funtor contravariante

$$F : X_\tau \to D.$$

Un **haz** F es un prehaz que además satisface la condición de pegado siguiente: para cada cubrimiento $\{U_i \to U\}$, el diagrama

$$F(U) \to \prod_i F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j).$$

es un ecualizador.

Existe un **funtor haz** o **de pegado** que asocia a cada prehaz F un haz $\tilde{F}$ y una aplicación de prehaces $\eta : F \to \tilde{F}$ de modo universal.

Ejemplo: *Haz de las funciones continuas en un espacio topológico* X, dado por $F(U) := Map(U, \mathbb{R})$.
Nota: Este haz es compatible con la intersección y los cubrimietos de abiertos, lo cual nos llevará a la definición de sitio de Grothendieck.

Ejemplo: *Haz de secciones de un fibrado* $p : E \to B$: Dado por $\Gamma(U) = \{s : U \to E \mid p \circ s = \mathrm{id}_U\}$.

Suele denotarse para un (pre)haz F:

- $\Gamma(U, F) := F(U)$ *secciones sobre* U.
- $\Gamma(F) := \Gamma(X, F)$ *secciones globales*.
- El *tallo* o *fibra* de F sobre un punto $x \in X$ es

$$F_x := \mathrm{colim}_{x \in U} F(U).$$

Un **espacio anillado** es un par $(X, \mathcal{O}_X)$ donde X es un espacio topológico, y $\mathcal{O}_X$ es un haz de anillos sobre X. En caso de que los tallos del haz sean anillos locales se dice que es un **espacio localmente anillado**.
Un **esquema afín** es un espacio anillado del tipo $(\mathrm{Spec(A)}, \mathcal{O})$ asociado a un anillo conmutativo A con unidad.

Un **esquema** S es un espacio localmente anillado $S = (X, \mathcal{O})$ que es localmente afín.
"Se obtiene pegando esquemas afines, de modo análogo a como una variedad topológica se obtiene pegando discos."

$X =$ *soporte de* S.
Un *subesquema abierto* U de $S = (X, \mathcal{O})$ es la restricción $(U, \mathcal{O}|\, U)$ a un abierto U de X.
etc.

6. Sitios de Grothendieck

Un **sitio** es una categoría $\mathbf{C}$, cuyos objetos suelen llamarse "<u>abiertos</u>", que admite productos fibrados y que viene equipado con una *topología de Grothendieck*, dada por una familia de "<u>cubrimientos</u>": estos son conjuntos de mofismos $\{U_i \xrightarrow{p_i} U\}$ tales que:

- (Isomorfismos) $\{U' \xrightarrow{\cong} U\}$ es un cubrimiento.
- (Transitividad) Si $\{U_i \xrightarrow{p_i} U\}$ es un cubrimiento y $\{U_{i,j} \xrightarrow{p_{ij}} U_i\}$ es un cubrimiento para todo i, entonces $\{U_{i,j} \xrightarrow{p_i \circ p_{ij}} U\}$ es un cubrimento.
- (Cambio de base) Si $\{U_i \xrightarrow{p_i} U\}$ es un cubrimiento y $V \to U$ es un morfismo entonces $\{V \times_U U_i \to V\}$ es un cubrimiento.

(1) Toda categoría **C** admite una topología de Grothendieck "obvia", donde los únicos cubrimientos son $\{U \stackrel{\mathrm{id}}{\to} U\}$.

(2) X_τ = sitio usual de un espacio X:
   - Objetos: inclusiones de abiertos $U \subset X$.
   - Morfismos: inclusiones $V \subset U$.
   - Cubrimientos: cubrimientos usuales de abiertos.

(3) X_{et} = sitio étale de un espacio X:
   - Objetos: $p : U \to X$ que son espacios recubridores sobre abiertos de X (son homeomorfismos locales).
   - Morfismos y cubrimientos se definen con diagramas conmutativos.

(4) S_{Zar} = sitio de Zariski de un esquema S:
   - Objetos: subesquemas abiertos $U \subset S$.
   - Morfismos: inclusiones de subesquemas.
   - Cubrimientos: $\{U_i \subset U\}$ tal que $\cup_i U_i = U$.

(5) S_{et} = sitio étale de un esquema S.

(6) S_{Nis} = sitio de Nisnevich de un esquema S.

(7) $(Sch/S)_{Zar}$, $(Sch/S)_{Nis}$, $(Sch/S)_{et}$ sitios "amplios" de esquemas de tipo finito sobre S con las topologías de Zariski, de Nisnevich y étale, respectivamente.

(8) $(Sm/S)_{Nis}$ es el sitio de Nisnevich de los esquemas lisos de tipo finito sobre un esquema noetheriano S.

La topología de Nisnevich es intermedia entre la de Zariski y la étale, y comparte buenas propiedades de ambas. Nisnevich, Thomason usaron este sitio para estudiar teoría K-algebraica de esquemas (véase más información en el trabajo de Morel–Voedvosky).

7. Prehaces simpliciales sobre un sitio pequeño

$\mathbf{C}$ = un sitio pequeño de Grothendieck;

$\mathrm{Pre}(\mathbf{C})$ = la categoría de prehaces sobre $\mathbf{C}$ con valores en la categoría de conjuntos:

- objetos: funtores $F : \mathbf{C}^{op} \to Sets$;
- morfismos: transformaciones naturales entre funtores.

$\mathbf{S}\mathrm{Pre}(\mathbf{C})$ = categoría de prehaces simpliciales sobre $\mathbf{C}$

- objetos: funtores $F : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{SS}$;
- morfismos: transformaciones naturales.

Observar $\mathbf{S}\mathrm{Pre}(\mathbf{C}) = \Delta^{op}\mathrm{Pre}(\mathbf{C})$.

(1) Cada conjunto simplicial K puede identificarse con el prehaz simplicial con valores constantes $= K$.
(2) Cada objeto A de $\mathbf{C}$ se identifica con el prehaz simplicial R_A que lo representa, dado por $R_A(U) = \mathbf{Hom}(U, A)$.

En $\mathbf{S}\mathrm{Pre}(\mathbf{C})$ se combinan los conjuntos simpliciales con los objetos del sitio $\mathbf{C}$, de modo que podemos hacer teoría de homotopía. Esta teoría de homotopía está determinada por la topología del sitio.

Grupos de homotopía: Sea X un prehaz simplicial. $\tilde{\pi}_n(X)$ haz asociado al n-ésimo prehaz de homotopía $\pi_n(X)$ definido como:

$$(x_0 : U \to X_0) \mapsto \pi_n(X(U), x_0).$$

- Equivalencias débiles locales: $f : X \to Y$ que inducen
  - $f_* : \tilde{\pi}_0(X) \xrightarrow{\cong} \tilde{\pi}_0(Y)$,
  - y tales que el diagrama de haces

$$\begin{tikzcd} \tilde{\pi}_n(X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d] & \tilde{\pi}_n(Y) \arrow[d] \\ \tilde{X}_0 \arrow[r, "f_*"] & \tilde{Y}_0 \end{tikzcd}$$

  es cartesiano.

  (esto es, que inducen sobre los tallos equivalencias débiles, para cualquier elección de puntos bases.)
- Cofibraciones: $f : X \to Y$ monomorfismos, estos son aquellos que inducen aplicaciones inyectivas $X_n(U) \to Y_n(U)$ para todo $n \geq 0$ y todo objeto U de C.
- Fibraciones globales: Definidos con la RLP usual.

Teorema: [Jardine, 1999]
Sea $\mathbf{C}$ *un sitio pequeño de Grothendieck. Entonces con las clases de equivalencias débiles locales, cofibraciones y fibraciones globales anteriores,* $\mathbf{S}\mathrm{Pre}(\mathbf{C})$ *admite una estructura de categoría de modelos cerrada, simplicial y propia.*

Hay un teorema análogo para la categoría $\mathbf{S}\mathrm{Shv}(\mathbf{C})$ de haces simpliciales sobre el sitio $\mathbf{C}$ (Joyal, Jardine, Morel-Voevodsky).
Se sigue del resultado anterior usando que la aplicación de pegado $\eta : X \to \tilde{X}$ es una equivalencia débil local. Además, el funtor de pegado induce una equivalencia

$$\mathbf{Ho}(\mathbf{S}\mathrm{Pre}(\mathbf{C})) \simeq \mathbf{Ho}(\mathbf{S}\mathrm{Shv}(\mathbf{C}))$$

entre las categorías homotópicas asociadas (Jardine'96).

Categorías punteadas:
$\mathbf{S}\mathrm{Pre}(\mathbf{C})_*$ categoría de prehaces simpliciales punteados sobre $\mathbf{C}$. El funtor olvido

$$? : \mathbf{S}\mathrm{Pre}(\mathbf{C})_* \to \mathbf{S}\mathrm{Pre}(\mathbf{C})$$

tiene como adjunto a izquierda al funtor que añade un punto exterior:

$$+ : \mathbf{S}\mathrm{Pre}(\mathbf{C}) \to \mathbf{S}\mathrm{Pre}(\mathbf{C})_*$$

Se transporta via este par de funtores adjuntos la estructura de modelos de la categoría no punteada a la punteada. Tenemos un par de funtores adjuntos entre las categorías homotópicas asociadas.

8. Localización en prehaces simpliciales sobres sitios pequeños

Sea $\mathbf{C}$ un sitio pequeño.
Dado K un conjunto simplicial y U un objeto del sitio $\mathbf{C}$, se define el prehaz simplicial $L_U K$ como:

$$L_U K(V) = \bigsqcup_{\phi : V \to U} K.$$

Los morphismos de prehaces simpliciales

$$L_U K \to X$$

se corresponden con aplicaciones de conjuntos simpliciales

$$K \to X(U).$$

Las cofibraciones del tipo $Y \to L_U\Delta[n]$ generan todas las cofibraciones en $\mathbf{S}\mathrm{Pre}(\mathbf{C})$.

f-localización: Sea $f : A \to B$ una cofibración en $\mathbf{S}\mathrm{Pre}(\mathbf{C})$. Definimos:

- f-locales: Z globalmente fibrante y $Z \to *$ tiene la RLP con respecto a las cofibraciones de prehaces

$$B \times Y \bigcup_{A\times Y} A \times L_U\Delta[n] \xrightarrow{(f,j)_*} B \times L_U\Delta[n].$$

- f-equivalencias: $g : X \to Y$ que inducen una equivalencia débil

$$g^* : \mathbf{Hom}\,(Y, Z) \longrightarrow \mathbf{Hom}\,(X, Z)$$

  para todo f-local Z.
- f-cofibraciones = cofibraciones.
- f-fibraciones: definidas con la RLP usual.

Teorema: [Goerss-Jardine, 1998]
Sea $\mathbf{C}$ *un sitio pequeño de Grothendieck. Entonces, con las clases de f-equivalencias débiles, cofibraciones y f-fibraciones anteriores,* $\mathbf{S}\mathrm{Pre}(\mathbf{C})$ *admite una estructura de categoría de modelos cerrada y simplicial.*

Jardine, 2000:

Si $f : * \to I$, donde I es cualquier prehaz simplicial entonces, dicha estructura de modelos es PROPIA.

Hay resultados análogos para haces simpliciales sobre $\mathbf{C}$.

Nota: El caso particular de haces simpliciales sobre un sitio de Grothendieck con intervalo I fue antes tratado por Morel y Voevodsky.

Teorema: [Neumann–R]

Sea $\mathbf{S}\mathrm{Pre}(\mathbf{C})_*$ *la categoría de prehaces simpliciales punteados sobre un sitio pequeño de Grothendieck* $\mathbf{C}$*, con la estructura de modelos local respecto de* $* \to I$*. Sea* A *un objeto fijo de* $\mathbf{S}\mathrm{Pre}(\mathbf{C})_*$*. Entonces, existe una estructura* $(\mathbf{S}\mathrm{Pre}(\mathbf{C})_*)^A$ *de categoría de modelos cerrada* A*-celular que admite factorizaciones funtoriales.*

Demostración: Cada objeto A de $\mathbf{C}$ es cofibrante y pequeño (de hecho es "accesible" Grothendieck-Artin-Verdier (SGA 4) 1972). Un conjunto de generadores de cofibraciones triviales viene dado por

$$(* \times L_U\Delta^n) \coprod_{(*\times Y)} (I \times Y) \to I \times L_U\Delta^n$$

indicados sobre todos los subobjetos $Y \subset L_U\Delta^n$. El resultado se sigue entonces de los teoremas de Nofech y Goerss–Jardine. $\square$

Un resultado análogo vale para la categoría $\mathbf{S}\mathrm{Shv}(\mathbf{C})_*$ de haces simpliciales punteados sobre un sitio $\mathbf{C}$.

9. Aplicación a la teoría homotópica motívica

Sea $\mathbf{C} = (Sm|_S)_{Nis}$ el sitio de Nisnevich de los esquemas lisos de tipo finito sobre un esquema noetheriano S y sea $\mathbf{S}\mathrm{Pre}(\mathbf{C})$ su correspondiente categoría de prehaces simpliciales.

La categoría homotópica motívica de Morel y Voevodsky se obtiene localizando la categoría $\mathbf{S}\mathrm{Pre}(\mathbf{C})$ respecto un punto racional $f : * \to \mathbb{A}^1$.

Las correspondientes equivalencias débiles locales y fibraciones globales se llaman respectivamente:

- equivalencias débiles motívicas
- fibraciones motívicas
- (cofibraciones motívicas = inclusiones)

Teorema: [Morel-Voevodsky, Jardine] *Con las tres clases anteriores,* $\mathbf{S}\mathrm{Pre}((Sm|_S)_{Nis})$ *admite una estructura de categoría de modelos cerrada, simplicial y propia.*

Hay un resultado análogo para haces simpliciales. Además, los funtores haz y olvido establecen una equivenlencia entre las correspondientes categorías homotópicas (Jardine).

Teorema: [Neumann–R]
Sea $\mathbf{S}\mathrm{Pre}((Sm|_S)_{Nis})_*$ *la categoría de prehaces simpliciales punteados sobre el sitio de Nisnevich* $(Sm|_S)_{Nis}$ *y sea* A *un objeto de* $\mathbf{S}\mathrm{Pre}((Sm|_S)_{Nis})_*$. *Entonces, existe una estructura de categoría de modelos cerrada* A*-celular* $(\mathbf{S}\mathrm{Pre}((Sm|_S)_{Nis})_*)^A$ *que admite factorizaciones funtoriales.*

Tenemos un resultado análogo para $\mathbf{S}\mathrm{Shv}((Sm|_S)_{Nis})_*$. En particular obtenemos los funtores de celularización $Cell_A$ y nulificación P_A deseados.