PROBLEMAS DE TOPOLOGÍA

Licenciatura de Matemáticas, curso 2006-07

Espacios topológicos

1.- Determinar el número de topologías distintas en un conjunto de tres elementos.

2.- Sobre un conjunto X, consideremos $\tau = \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ es numerable}\} \cup \{\emptyset\}$. Comprobar que τ es una topología (es la llamada topología conumerable).

3.- Consideremos $\mathbb{R}^2$ con la topología usual. Decidir cuales de los siguientes subconjuntos son abiertos, cuales son cerrados, y cuales no son ni abiertos ni cerrados:

(i)	$\{(x,y) \mid \ \lvert x+y\rvert < 1\}$.	(iv)	$\{(x,y) \mid x = y,\, x \neq 0\}$.
(ii)	$\{(x,y) \mid \ \lvert x+y\rvert \leq 1\}$.	(v)	$\{(x,y) \mid x^4 + y^4 < 1\}$.
(iii)	$\{(x,y) \mid xy \geq 0\}$.	(vi)	$\{(x,y) \mid \ \lvert x\rvert > 1\} \cup \{(x,y) \mid y = 0\}$.

Calcular el interior y la clausura de cada uno de ellos.

4.- Sean A y B dos subconjuntos de un espacio topológico X. Demostrar que:

(i)	$\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$;	(iv)	$\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;	(vii)	$\overset{\circ}{\widehat{X-A}} = \mathring{X} - \overline{A}$;
(ii)	$\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$;	(v)	$\overline{A\cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;		
(iii)	$\overset{\circ}{\widehat{A\cup B}} \supseteq \mathring{A} \cup \mathring{B}$;	(vi)	$\overline{A\cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$;		

y comprobar que estos son los mejores resultados posibles.

5.- Sea $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ la frontera de A. Demostrar que:

(a) $\partial A = \overline{A} \setminus A^{\mathrm{o}}$.

(b) $\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$ y que se da la igualdad en el caso en que $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$.

(c) $\partial(\partial(\partial A)) = \partial(\partial A) \subseteq \partial A$.

6.- Sea $f : X \to Y$ una aplicación entre dos espacios topológicos. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) f es continua.

(b) Para todo cerrado C de Y, tenemos que $f^{-1}C$ es cerrado en X.

(c) Para todo $A \subseteq X$, se cumple $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

(d) Para todo $B \subseteq Y$, se cumple $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

(e) Para todo $B \subseteq Y$, se cumple $f^{-1}(B^{\mathrm{o}}) \subseteq (f^{-1}(B))^{\mathrm{o}}$.

7.- Sea $\mathcal{A}$ un recubrimiento de X. Demostrar que en cada uno de los casos siguientes, una aplicación $f\colon X \longrightarrow Y$ es continua si y sólo si es continua restringida a cada $A \in \mathcal{A}$:

(a) $\mathcal{A}$ es un recubrimiento por abiertos.

(b) $\mathcal{A}$ es un recubrimiento por cerrados finito.

8.- Sea X un conjunto cualquiera y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ el conjunto de todas las intersecciones finitas de $\mathcal{S}$. Se define $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ como la familia de todos los subconjuntos de X que son uniones arbitrarias de conjuntos de B. Probar que τ es una topología y que es la mínima (o menos fina) que contiene a $\mathcal{S}$. (Nota: $\mathcal{S}$ se dice que es *subbase* y $\mathcal{B}$ *base* de la topología τ que generan).

9.- Sea $A = (-\infty, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 3) \cup \{\frac{3n+10}{n+3} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Calcular el interior, la clausura y los puntos límite de A en $\mathbb{R}$ con las topologías siguientes:

(a) La usual.

(b) La cofinita.

(c) La generada por los intervalos de la forma $[a, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

(d) La generada por los intervalos de la forma $[a, b)$ con $a, b \in \mathbb{Q}$.

(e) La generada por los intervalos de la forma $(-\infty, a)$ con $a \in \mathbb{R}$.

Nota: Sea A un subconjunto de un espacio topológico X. Un punto $x \in X$ se dice *punto límite* de A si para todo abierto U de X que contiene a x, $U \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset$.

10.- Demostrar que todo espacio topológico X que sea 2^{o} numerable es separable. (El recíproco no es cierto, ver el problema siguiente).

11.- Sea X un conjunto no numerable, y fijemos un punto $x_0 \in X$. Consideremos la familia de subconjuntos $\tau = \{\mathcal{U} \,|\, \mathcal{U} = \emptyset \text{ o bien } x_0 \in \mathcal{U}\}$. Demostrar que:

(a) (X, τ) es un espacio topológico.

(b) Si $\mathcal{U}$ es un abierto diferente del vacío, entonces $\overline{\mathcal{U}} = X$.

(c) Si C es un cerrado diferente de X, entonces $\overset{\circ}{C} = \emptyset$.

(d) X es separable, pero no 2^{o} numerable.

Construcciones de espacios topológicos: Homeomorfismos y transformaciones

En varios de los problemas que proponemos en esta lista se podrá utilizar un resultado de teoría (que demostraremos más adelante) que nos asegura que toda biyección continua de un compacto en un Hausdorff es un homeomorfismo. La demostración usa las propiedades siguientes: todo subespacio cerrado de un compacto es compacto, el cociente de un compacto es compacto, todo subespacio de un Hausdorff es Hausdorff y, finalmente, que todo subespacio compacto de un Hausdorff es cerrado.

La página de Neil Strickland http://www.shef.ac.uk/~pm1nps/courses/algtop contiene animaciones que ilustran algunos de los homemorfismos y transformaciones que aquí proponemos.

Una *homotopía* entre dos aplicaciones continuas $f, g : A \to X$ es una aplicación continua $H : A \times [0,1] \to X$ tal que $H(a,0) = f(a)$ y $H(a,1) = g(a)$ para todo $a \in A$. Observar, que a medida que t varía en el intervalo $[0,1]$, podemos interpretar $H_t : A \to X$ dada por $H_t(a) = H(a,t)$ como una " película en la que vemos a $f(A)$ "transformarse o deformarse" en $g(A)$. En prácticas, podremos ver con el programa Mathematica algunas de las transformaciones que aparecen en los siguientes problemas.

12.- Demostrar que el cono $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = (1-z)^2 \, z \geq 0\}$ es homeomorfo al disco $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Encontrar una transformación lineal entre el cono y el disco $D = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ visto ahora en $\mathbb{R}^3$.
Indicación: Para la transformación, considerar las parametrizaciones del cono y del disco $f, g : [0, 2\Pi] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$ dadas por:

$$f(\alpha, r) = ((1-r)\cos\alpha, (1-r)\sin\alpha, r) \qquad y \qquad g(\alpha, r) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha, 0).$$

Definir entonces la transformación lineal $H_t(\alpha, r) = (1-t)f(\alpha, r) + tg(\alpha, r)$.

13.- Demostrar que el hemisferio norte $S^2_+ = \{(x,y,z) \in S^2 : z \geq 0\}$ es homeomorfo a D^2.

14.- Demostrar que $S^2 \setminus \{\text{polos}\}$ es homeomorfo a un cilindro $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, -1 < z < 1\}$.

15.- Demostrar que $S^2 - \{\text{polo norte}\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Indicación: utilizar la proyección estereográfica (en linea recta) desde el polo norte hacia el plano del ecuador.

16.- Demostrar que existen homeomorfismos

(a) $S^n \cong \partial I^{n+1}$;

(b) $D^n \cong I^n$;

(c) $D^n \times D^m \cong D^{n+m}$.

17.- Demostrar que:

(a) El anillo cerrado $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq \|(x,y)\| \leq 2\}$ es homeomorfo al cilindro $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$.

(b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \cong S^1 \times \mathbb{R}$ y, en general, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \cong S^{n-1} \times \mathbb{R}$.

18.- Diremos que un subespacio $A \subset X$ es un *retracto* de X si y sólo si existe una aplicación continua $r\colon X \longrightarrow A$ tal que $r(a) = a$ para todo $a \in A$. A una tal r se llema *retracción.* Demostrar que:

(a) D^n es un retracto de $\mathbb{R}^n$.

(b) S^{n-1} es un retracto de $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

(c) S^1 es un retracto del cilindro y de la banda de Möbius.

19.- Un retracto $A \subset X$ con retracción $r : X \to A$, se dice que es un retracto de deformación (fuerte) si existe una aplicación continua

$$H : X \times I \to X,$$

tal que $H(x, 0) = x$, $H(x, 1) = r(x)$ para todo $x \in X$ y $H(a, t) = a$ para todo $a \in A$, $t \in I$. Probar que en los siguientes subespacios son retractos de deformación:

(a) Los ejemplos del ejercicio anterior.

(b) El ecuador dentro de $S^2 \setminus \{\text{polos}\}$.

(c) El polo sur dentro de $S^2 \setminus \{\text{polo sur}\}$.

En el caso en que un punto es un retracto de deformación de un espacio X se dice entonces que X es *contraible.*

20.- Siguiendo la linea del ejercicio anterior, estudiar qué ocurre cuando eliminamos uno o dos meridianos o paralelos de un toro.

21.- La *unión puntual* $X \vee Y$ de dos espacios topológicos por los puntos $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ es el subespacio de $X \times Y$ formado por aquellos puntos de la forma (x_0, y) o (x, y_0). Probar que $S^1 \vee S^1$ es homeomorfo al subespacio de $\mathbb{R}^2$ formado por la unión de las circunferencias de radio 1, centradas en $(1, 0)$ y $(-1, 0)$.

22.- Demostrar que $D^n/S^{n-1} \cong S^n$.

23.- Recordemos que $\mathbb{R}P^n = (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\sim$, donde $(x_0, \ldots, x_n) \sim (y_0, \ldots, y_n)$ si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, tal que $x_i = \lambda y_i$ para $i = 0, \ldots, n$. Demostrar que:

(a) $\mathbb{R}P^n \cong S^n/\sim$, donde $x \sim \pm x$.

(b) $\mathbb{R}P^n \cong D^n/\sim$, donde $x \sim y$ si y sólo si $x = y$ o bien x e y son puntos antipodales de $S^{n-1} = \partial D^n$.

(c) $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$.

24.- Consideremos la acción $\mu : (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\mu((m,n),(x,y)) = (m+x,\, n+y)$. Demostrar que $\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ es homeomorfo al toro.

25.- Sea X la banda infinita $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1/2 \leq y \leq 1/2\}$ de $\mathbb{R}^2$, sobre la cual actúa $\mathbb{Z}$ como $m \cdot (x,y) = (m+x,\, (-1)^m y)$. Demostrar que $X/\mathbb{Z}$ es homeomorfo a la banda de Möbius.

Conexión y arco-conexión

26.- Demostrar que un subconjunto de $\mathbb{R}$ es conexo si y sólo si es un intervalo o un punto. (Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ diremos que es un intervalo si contiene al menos dos puntos diferentes, y si dados $a, b \in A$ con $a < b$ y un punto x tal que $a < x < b$, se cumple $x \in A$.)

27.- Sea A un subespacio conexo de X y supongamos que $A \subseteq Y \subseteq \overline{A}$. Demostrar que Y es conexo.

28.- Demostrar que no existe ninguna función continua $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ para la cual $x \in \mathbb{Q}$ si y sólo si $f(x) \notin \mathbb{Q}$.

29.- Supongamos que Y_0 e $\{Y_j,\, j \in J\}$ son subespacios conexos de un espacio X. Demostrar que si para todo $j \in J$ se cumple $Y_0 \cap Y_j \neq \emptyset$, entonces el espacio $Y = Y_0 \cup (\cup_{j\in J} Y_j)$ es conexo.

30.- Demostrar que si $n \geq 1$, entonces $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ es conexo. Deducir que S^n y $\mathbb{R}P^n$ son conexos para todo $n \geq 1$.

31.- Demostrar que, para cada uno de los pares A y B de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ siguientes, el espacio $A \cup B$ es conexo:

(i) $A = \{(x,y) \mid x = 0,\ -1 \leq y \leq 1\}$,
$B = \{(x,y) \mid 0 < x \leq 1,\ y = \sin(\pi/x)\}$.

(ii) $A = \{(x,y) \mid 1/2 \leq x \leq 1,\ y = 0\}$,
$B = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ y = x/n,\ n \in \mathbb{Z}\}$.

32.- Dos subconjuntos A y B de un espacio topológico se llaman separados si $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$. Sean A y B separados, X conexo y supongamos que $Y = X \setminus (A \cup B)$ es conexo. Demostrar que $A \cup Y$ y $B \cup Y$ son conexos.

33.- Sea A el subconjunto del plano formado por los puntos con al menos una coordenada racional. Determinar las propiedades de conexión de A y de $\mathbb{R}^2 \setminus A$.

34.- Sea X un espacio topológico y C un subespacio conexo de X. Demostrar que si para un subespacio E de X se cumple $C \cap E \neq \emptyset$ y $C \cap (X \setminus E) \neq \emptyset$, entonces $C \cap \partial E \neq \emptyset$.

35.- Demostrar que los subconjuntos $A \cup B$ correspondientes al ejercicio 31 no son arco-conexos.

36.- Sea A un subconjunto arco-conexo de un espacio X y sea $\{A_j,\, j \in J\}$ una colección de subconjuntos arco-conexos de X, donde cada uno corta a A. Demostrar que el espacio $A \cup (\cup_{j\in J} A_j)$ es arco-conexo.

37.- Demostrar que S^n es arco-conexo para todo $n > 0$.

38.- Demostrar que $\mathbb{R}^n$ es localmente arco-conexo. Un espacio X es *localmente arco-conexo* si para cada punto $x \in X$ y cada abierto U, $x \in U$, existe un entorno V de x arco-conexo, tal que $V \subset U$.

39.- Demostrar que el espacio $Y \subseteq \mathbb{R}^2$ dado por $Y = A \cup B \cup C$, donde

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0\} \\ B &= \{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 0,\ y = 0\} \\ C &= \{(x,y) \mid 0 < x \leq 1,\ y = \tfrac{1}{2}\sin(\pi/x)\} \end{aligned}$$

es arco-conexo pero no localmente arco-conexo.

40.- Sea $Z = Y \cup D \subset \mathbb{R}^2$, donde Y es como en el ejercicio anterior y D es la circunferencia $\{(x-1)^2 + y^2 = 1\}$. Demostrar que Z es localmente arco-conexo.

41.- Decidir si son ciertas o falsas las afirmaciones siguientes:

(a) Si A es un subconjunto arco-conexo de X, entonces $\overline{A}$ es arco-conexo.

(b) Si A y B son subconjuntos arco-conexos de X tales que $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$, entonces $A \cup B$ es arco-conexo.

42.- Sean X un espacio topológico, $A \subset X$, $x \in \overset{\circ}{A}$, $y \notin A$. Demostrar que todo camino que une x con y corta a la frontera de A.

Compacidad y espacios de Hausdorff

43.- Dar un ejemplo de un espacio métrico (X, d) en el que no todo subconjunto cerrado y acotado sea compacto. (Ayuda: considerar la métrica $d'(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ equivalente a d para la que todo subconjunto es obviamente acotado.)

44.- Sea (X, d) un espacio métrico:

(a) Supongamos que toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente. Sea $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ un recubrimento por abiertos de X. Entonces existe un $\delta > 0$, tal que para todo $x \in X$ la bola abierta $B(x; \delta)$ está contenida en algún U_α. A este δ se le llama *número de Lebesgue del recubrimiento.*

(b) Demostrar que (X, d) es compacto si y sólamente si toda sucesión tiene una subsucesión convergente.

45.- Demostrar que todo espacio X compacto y Hausdorff es normal, esto es que dados dos cerrados disjuntos C y D existen abiertos disjuntos U y V tal que $C \subset U$ y $D \subset V$. (Ayuda: probar antes que es regular, es decir que un punto y un cerrado se pueden separar).

46.-

(a) Sean $\{C_n\}$ subconjuntos conexos y compactos de un espacio Hausdorff tales que $C_{n+1} \subset C_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que $\cap_{n=1}^{\infty} C_n$ es conexo.

(b) Dar un ejemplo de una familia de subconjuntos conexos cerrados $C_n \subset \mathbb{R}^2$ tales que $C_{n+1} \subset C_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pero donde $\cap_{n=1}^{\infty} C_n$ no sea conexo.

47.- Demostrar que la gráfica de una función $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ es compacta si y sólo si f es continua. Dar un ejemplo de una función discontinua $g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ con gráfica cerrada pero no compacta.

48.- Demostrar que la imagen por una aplicación continua de un espacio localmente compacto no es siempre localmente compacto. (Sabemos por teoría que sí lo es si la aplicación es abierta.)

49.- Demostrar que la compactificación de Alexandrov $(\mathbb{R}^n)_\infty$ es homeomorfa a la esfera S^n.

50.- Sea $X = (0, 1) \cup (2, 3)$. Probar que $X_\infty \cong S^1 \vee S^1$.

51.- Demostrar que la intersección de dos compactos puede no ser compacta, pero que toda intersección de compactos cerrados es compacta y cerrada.

52.- Demostrar que compacto no implica localmente compacto.

53.- Sean X_1 y X_2 dos espacios topológicos y sean $K_i \subset X_i$, $i = 1, 2$, subespacios compactos. Demostrar que todo entorno de $K_1 \times K_2$ en $X_1 \times X_2$ contiene un entorno de la forma $U_1 \times U_2$ con $K_i \subset U_i$ abierto para $i = 1, 2$.

54.- Sea X compacto y Hausdorff. Demostrar que X es regular y normal.

55.- Sea $f\colon X \longrightarrow Y$ continua y exhaustiva, con X compacto e Y Hausdorff. Demostrar que Y tiene la topología cociente determinada por f; es decir, $U \subset Y$ es abierto si y sólo si $f^{-1}(U)$ es abierto.

56.- Demostrar que Y es Hausdorff si y sólo si $\Delta_Y = \{(y,y) \in Y \times Y\}$ es un cerrado de $Y \times Y$.

57.- Demostrar que todo retracto de un espacio Hausdorff X es cerrado. (Ayuda: Usar la aplicación $X \to X \times X$ dada por $x \mapsto (x, r(x))$, donde r es la retracción).

58.- Sea $f\colon X \longrightarrow Y$ continua. Demostrar que si Y es Hausdorff, entonces $\Delta_f = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid f(x_1) = f(x_2)\}$ es un cerrado de $X \times X$.

59.- Sea X compacto y Hausdorff, y sea Y el espacio cociente determinado por una cierta aplicación $f\colon X \longrightarrow Y$. Demostrar que:

(a) Y es Hausdorff si y sólo si f es cerrada.

(b) Y es Hausdorff si y sólo si Δ_f es cerrado.

60.- Demostrar que los espacios $X = \mathbb{R}/(0,1)$ y $Y = \mathbb{R}/[0,1]$ no son homeomorfos. (Indicación: Demostrar que $Y \cong \mathbb{R}$ y por tanto Hausdorff y sin embargo $\mathbb{R}/(0,1)$ no es Hausdorff.)

61.- Demostrar que todo subespacio denso y localmente compacto de un espacio Hausdorff es abierto.

Superficies compactas

62.- Demostrar que $P^2\sharp P^2\sharp P^2 \cong P^2\sharp T \cong P^2\sharp K$, donde T denota el toro y K la botella de Klein.

63.- Demostrar que toda superficie (compacta, conexa y sin borde) es homeomorfa a una de las siguientes: $S^2\sharp nT$, $P^2\sharp nT$ o bien $K\sharp nT$, donde $n > 0$.

64.- Si $S = nT\sharp mP^2$, ¿a qué superficie estándar es homeomorfa S?

65.- Cul es la superficie representada por un decágono regular con las aristas identificadas dos a dos tal como indica el símbolo $abcdec^{-1}da^{-1}b^{-1}e^{-1}$?

66.- Cul es la superficie representada por un polígono de $2n$ lados con las aristas identificadas dos a dos según el símbolo $a_1a_2\cdots a_na_1^{-1}a_2^{-1}\cdots a_{n-1}^{-1}a_n$?

67.- Hacer lo mismo si las aristas estn identificadas según el símbolo $a_1a_2\cdots a_na_1^{-1}a_2^{-1}\cdots a_{n-1}^{-1}a_n^{-1}$.

68.- Clasificar las superficies siguientes:

(a) $abcdca^{-1}bd^{-1}$.

(b) $aba^{-1}cdb^{-1}c^{-1}ed^{-1}e^{-1}$.

(c) $abcadb^{-1}efce^{-1}df^{-1}$.

69.- Demostrar que, para toda triangulación de una superficie compacta, se cumple:

$$3c = 2a$$
$$a = 3(v - \chi)$$
$$v \geq \tfrac{1}{2}(7 + \sqrt{49 - 24\chi}).$$

70.- Demostrar que no es posible subdividir la superficie de una esfera en regiones de manera que cada región tenga 6 lados y cada par de regiones diferentes tengan como mucho un lado en común.

71.- Demostrar que los únicos poliedros regulares son el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. (Un poliedro es regular si es homeomorfo a S^2, todas las caras tienen el mismo número de lados y en cada vértice hay el mismo número de aristas.)

72.- Demostrar que la característica de Euler de una superficie compacta con borde que tenga k componentes en su borde satisface $\chi \leq 2 - k$.

73.- Demostrar que toda n-variedad es localmente arco-conexa. (En particular, toda n-variedad conexa es arco-conexa.)

74.- Sea

124	235	346	457	561	672	713
134	245	356	467	571	612	723

la triangulación de una superficie. ¿De cuál superficie se trata?

75.- (a) Identifiquemos dos a dos los lados de un octógono regular de manera que se obtenga una superficie compacta. Demostrar que la característica de Euler de esta superficie es mayor o igual que -2.

(b) Demostrar que toda superficie compacta (orientable o no) con característica de Euler mayor o igual que -2 se puede obtener identificando dos a dos los lados de un octógono regular.

76.- Clasificar las siguientes superficies con borde.

(a) $p^{-1}rtvqpsr^{-1}$.

(b) $mathem^{-1}a^{-1}t^{-1}ics$.

(c) $acba^{-1}db^{-1}ecef$.

77.- Demostrar que la suma conexa de una banda de Möbius con borde y un toro es homeomorfa a la suma conexa de una banda de Möbius con borde y una botella de Klein.

78.- Decir a qué superficie corresponde la siguiente triangulación

123	256	341	451
156	268	357	468
167	275	379	475
172	283	385	485.

79.- Demostrar que una poliedro homeomorfo a una esfera, constituido por pentágonos y hexágonos ha de tener necesariamente 12 pentágonos (como una pelota de fútbol).