Análisis Complejo, Licenciatura de Matemáticas
2^o. Cuatrimestre (4:30 horas)
27 de junio de 2007

==============================

1. *(3.5 puntos)* **Desarrolla** el tema: Abiertos simplemente conexos del plano.

   ==============================

   Solución: Un posible esquema a desarrollar puede ser como sigue.

   Definición de abierto simplemente conexo / Definición de dominio homológicamente conexo / Definición de isomorfismo conforme / Listado de las propiedades que, a posteriori, han de ser equivalentes (admisión de logaritmo continuo,..., admisión de primitiva,...) / Teorema de Riemann de la representación conforme / Conclusión: "salvo isomorfiamos, sólo hay dos abiertos en el plano...". ■

   ==============================

2. *(2 puntos)* **Caracteriza** explícitamente los automorfismos conformes del disco unidad.

   ==============================

   Solución: Un posible esquema a desarrollar puede ser como sigue.

   Probar que la familia de transformaciones de Möbius

   $$\varphi_\alpha(z) := \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}, \forall z \in \mathbb{D} \qquad (1)$$

   está compuesta por aplicaciones de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$; se enuncia el lema de Schwarz, y se prueba que, salvo giros del propio $\mathbb{D}$, todo automorfismo del disco unidad se escribe de tal forma (1). ■

   ==============================

3. *(1.5 puntos)* **Prueba** que, para $0 < b < a$, se tiene

   $$\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{a + b\cos t} dt = \frac{\pi}{b^2}\left(a - \sqrt{a^2-b^2}\right).$$

   ==============================

   Solución: Llamemos I a la integral trigonométrica que queremos calcular. Hagamos el cambio de variable $z := e^{it}$. Con este cambio:

   $$I = \frac{i}{2b}\int_{\mathbb{T}} \frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left(z-\alpha\right)\left(z-\beta\right)} dz$$

   donde α y β son las raíces de la ecuación $z^2 + 2\frac{a}{b}z + 1 = 0$. Es decir:

   $$\alpha = \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}, \beta = \frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}$$

donde $\alpha\beta = 1$. Como $|\beta| > 1$, sólo son relevantes los residuos, de la función a integrar, en el polo simple α y en el polo doble 0. Para el primer caso:

$$\operatorname{Res}(f, \alpha) = \lim_{z \longrightarrow \alpha} \frac{\left(z^2 - 1\right)^2}{z^2 (z - \beta)} = \frac{2\sqrt{a^2 - b^2}}{b}.$$

Para el segundo obtenemos directamente su desarrollo en series de Laurent:

$$\frac{\left(z^2 - 1\right)^2}{z^2 \left(z^2 + 2\frac{a}{b}z + 1\right)} = 1 - \frac{2a}{b}\frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \implies \operatorname{Res}(f, 0) = -\frac{2a}{b}.$$

En consecuencia:

$$I = \frac{i}{2b}\left\{i2\pi\left[\operatorname{Res}(f, \alpha) + \operatorname{Res}(f, 0)\right]\right\} = \frac{2\pi}{b^2}\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right). \qquad \blacksquare$$

================================

4. *(1.5 puntos)* Sea f una función entera, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, que lleva la circunferencia unidad en la recta real: $f(\mathbb{T}) \subset \mathbb{R}$. **Prueba** que f es constante.

================================

Solución: Escribamos $f := \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f := u + iv$, donde las funciones u, v son funciones armónicas en todo $\mathbb{R}^2$. Las condiciones de Cauchy-Riemann sobre f, obligan a que sobre la frontera del disco unidad $\mathbb{T}$ se tenga, como consecuencia de la hipótesis $v(\cos t, \mathrm{sen} t) = 0$, que $|f| = 0$. Aplicando el principio del módulo máximo, es constante (en particular, nula). $\blacksquare$

================================

5. *(1.5 puntos)* Has sacado el perro a pasear. Lo llevas al parque donde acostumbráis a dar vueltas alrededor del Gran Árbol Central (GAC). Como siempre, hoy tampoco te has acercado a GAC a menor distancia de la determinada por la longitud de la cadena con la que llevas sujeta a tu mascota. Una vez en tu casa, te has hecho la pregunta de quién de los dos habrá dado mayor o menor número de vueltas alrededor de GAC. Menos mal que este año has estudiado Análisis Complejo; y, por tanto, has podido **justificar** la respuesta encontrada. Ahora, cuéntamela a mi.

================================

Solución: Es conocido por nosotros, de la teoría, el siguiente resultado: "Dados dos caminos cerrados γ_1 y γ_2, y $\alpha \in \mathbb{C}$, si

$$t \in [a, b] \implies |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |\gamma_1(t) - \alpha|,$$

entonces, $\operatorname{Ind}_{\gamma_1}(\alpha) = \operatorname{Ind}_{\gamma_2}(\alpha)$". Si adaptamos el lenguaje de caminos a la situación real que se nos plantea, la conclusión se sigue de la interpretación del índice como contador de vueltas... $\blacksquare$

================================