Examen Final de Análisis Complejo

Licenciatura de Matemáticas

27 de junio de 2007

==============================

1. *(4 puntos)* **Desarrolla** el tema: Abiertos simplemente conexos del plano.

   ===

   Solución: Un posible esquema a desarrollar puede ser como sigue.

   Definición de abierto simplemente conexo / Definición de dominio homológicamente conexo / Definición de isomorfismo conforme / Listado de las propiedades que, a posteriori, han de ser equivalentes (admisión de logaritmo continuo,..., admisión de primitiva,...) / Teorema de Riemann de la representación conforme / Conclusión: "salvo isomorfiamos, sólo hay dos abiertos en el plano...". ■

   ===

2. *(1.5 puntos)* Derivabilidad, holomorfía y analiticidad de una función compleja de variable compleja. **Justifica** estos tres enfoques de la teoría de funciones complejas de variable compleja y a dónde se llega con cada una de estas tres definiciones.

   ===

   Solución: Un posible esquema a desarrollar puede ser como sigue.

   Se definen los tres conceptos. Se ve rápidamente cómo es más fuerte holomorfía que derivabilidad (algún ejemplo); y se echa mano de Weierstrass para ir de la analiticidad a la holomorfía y de Taylor para hacer lo recíproco. ■

   ===

3. *(1.5 puntos)* **Prueba** que si una función f es holomorfa en un dominio Ω, que contiene al disco unidad cerrado $\overline{\mathbb{D}}$, y verifica

   $$|z| \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow f(z) = f(2z),$$

   entonces f sólo puede ser una función constante.

   ===

   Solución: Para cada $z \in \overline{D(0, 1/2)}$, la sucesión $z, \frac{z}{2}, \frac{z}{4}, \frac{z}{8}, ..., \frac{z}{2^n}, ... \longrightarrow 0$ y está en el disco $\overline{D(0, 1/2)}$. Por continuidad, será

   $$f\left(\frac{z}{2^n}\right) \longrightarrow f(0).$$

   Pero, aplicando la hipótesis, todos los términos de la sucesión son el mismo, luego, para cada natural

   $$f(z) = f\left(\frac{z}{2^{n-1}}\right) = f\left(\frac{z}{2^n}\right) = f(0).$$

Como $z \in \overline{D(0,1/2)}$ era arbitrario, se concluye que f es constante en $\overline{D(0,1/2)}$. El principio de identidad, gracias a la conexión de Ω, se encarga del resto. $\blacksquare$

===

4. *(1.5 puntos)* **Prueba** que, para $0 < b < a$, se tiene

$$\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{a + b\cos t} dt = \frac{2\pi}{b^2}\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right).$$

===

Solución: Llamemos I a la integral trigonométrica que queremos calcular. Hagamos el cambio de variable $z := e^{it}$. Con este cambio:

$$I = \frac{i}{2b}\int_{\mathbb{T}} \frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left(z-\alpha\right)\left(z-\beta\right)} dz$$

donde α y β son las raíces de la ecuación $z^2 + 2\frac{a}{b}z + 1 = 0$. Es decir:

$$\alpha = \frac{-a + \sqrt{a^2-b^2}}{b}, \beta = \frac{-a - \sqrt{a^2-b^2}}{b}$$

donde $\alpha\beta = 1$. Como $|\beta| > 1$, sólo son relevantes los residuos, de la función a integrar, en el polo simple α y en el polo doble 0. Para el primer caso:

$$\operatorname{Res}(f,\alpha) = \lim_{z \longrightarrow \alpha} \frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left(z-\beta\right)} = \frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$$

Para el segundo obtenemos directamente su desarrollo en series de Laurent:

$$\frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left(z^2+2\frac{a}{b}z+1\right)} = 1 - \frac{2a}{b}\frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \implies \operatorname{Res}(f,0) = -\frac{2a}{b}.$$

En consecuencia:

$$I = \frac{i}{2b}\left\{i2\pi\left[\operatorname{Res}(f,\alpha) + \operatorname{Res}(f,0)\right]\right\} = \frac{2\pi}{b^2}\left(a - \sqrt{a^2-b^2}\right). \qquad \blacksquare$$

===

5. *(1.5 puntos)* **Prueba** que todos los ceros del polinomio

$$p(z) := z^8 + 3z^3 + 7z + 5$$

se hallan situados en el anillo $A\left(0; \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ y que, exactamente, dos de ellos se encuentran en el primer cuadrante.

===

Solución: La primera parte se resuelve gracias al teorema de Rouché. Con $|z| \leq \frac{1}{2}$ se tiene que $|p(z)| \geq 5 - \left(|z|^8 + 3|z|^3 + 7|z|\right) > 0$; luego no tiene ceros en el disco cerrado $\overline{D(0,1/2)}$. Para ver que tiene sus ocho ceros en $D(0,3/2)$, se puede razonar

$$|z| = 3/2 \implies |f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$$

tanto para la pareja de funciones

$$f(z) := z^8, \qquad g(z) := p(z)$$

como

$$f(z) := z^8 + 7z, \qquad g(z) := p(z).$$

La segunda parte necesita del concurso del principio del argumento (su concreción a regiones angulares). Como ya se ha probado, $|p(z)| > 0$, en todo el plano. Y como se trata de un polinomio complejo de coeficientes reales, bastará probar que en $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ tiene, exactamente, cuatro ceros (pues dos de ellos han de ser conjugados de los otros dos). Los cálculos no revisten mayor complejidad: el argumento continuo se toma sin necesidad de construcción complicada al ser

$$\operatorname{Re}(p(it)) = t^8 + 5 > 0, \forall t \in \mathbb{R},$$

de modo que

$$N = 8\frac{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \lim_{r \longrightarrow +\infty} \left[\arctan \frac{3r^3 - 7r}{r^8 + 5} - \arctan \frac{-3r^3 + 7r}{r^8 + 5}\right] = 4. \qquad \blacksquare$$

==