Análisis Complejo, Licenciatura de Matemáticas
1er. Cuatrimestre (6 horas)
13 de enero de 2007

==============================

Lee despacio *todos los enunciados: si no comprendes perfectamente lo que se te pide, no podrás acertar con la respuesta adecuada.*

No te obsesiones con contestar a todas las preguntas; consiste en ***que tenga sentido cada una de las afirmaciones que hagas****: escribe claro, con frases cortas, y con coherencia. Los razonamientos bien engarzados: los signos de implicación han de ayudar en el seguimiento de los argumentos, los márgenes deben respetarse para una lectura agradable. Las soluciones debes dejarlas bien expuestas: recuadradas.*

En tu expresión ***recuerda****: no consiste en que yo adivine, descubra o deduzca lo que tú sabes o quieres decir; consiste en que me lo cuentes como si yo lo tuviese que aprender de ti.*

Usa ***un folio para cada pregunta****; tu nombre no debe faltar, ni el número de la pregunta a la que estás respondiendo.*

==============================

1. (2.5 puntos) *Elige una de las dos opciones siguientes*:

   i. Holomorfía y analiticidad de funciones complejas de variable compleja.

   ii. Teorema de Taylor. Principio de identidad para funciones holomorfas.

2. (2.5 puntos) *Responde "verdadero" o "falso", justificadamente, a cada una de las siguientes diez afirmaciones:*

   i. La expresión $(1+i)^i$ no está definida unívocamente.

   ii. La diferencial en un punto $Df(a)$ es una plicación lineal de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ si, y sólo si, las partes real e imaginaria de $f : \Omega^\circ = \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en a.

   iii. Las únicas funciones enteras con parte real nula son las constantes.

   iv. En $\mathbb{C}$, se verifica la siguiente *versión* de la igualdad trigonométrica fundamental
   $$|\operatorname{sen} z|^2 + |\cos z|^2 = 1, \forall z \in \mathbb{C}.$$

   v. Existen aplicaciones conformes que no son holomorfas. Y viceversa: existen funciones holomorfas que no son conformes.

   vi. La exponencial compleja es la única extensión holomorfa a todo el plano $\mathbb{C}$ de la función exponencial real.

   vii. No podemos transformar un cuadrado en un triángulo mediante una transformación de Möbius.

   viii. No existe ningún isomorfismo conforme del plano $\mathbb{C}$ en el disco unidad $\mathbb{D}$.

ix. Una serie de potencias $\sum\limits_{n\geq 0} a_n (z-2)^n$ puede converger en $z=0$ y no ser convergente para $z=3$.

x. Si $f \in \mathcal{H}(D(a,r))$, su serie de Taylor coincide con ella en todo el disco; cosa que no ocurre en el caso real. (*Téngase en cuenta a la función*

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & .....x \in \mathbb{R} - \{0\} \\ 0 & .....x = 0 \end{cases}$$

como ayuda para la justificación de tu respuesta.)

3. (1.25 puntos) *Responde a las dos propuestas siguientes:*

i. Encuentra dos transformaciones de Möbius distintas, φ y ψ, que transformen la terna $\{-1,0,1\}$ en la terna $\{-i,1,i\}$. Explica cómo actúa cada una de ellas de modo que si llamamos, respectivamente, γ_1 y γ_2 a las rectas o circunferencias determinadas por cada una de estas ternas (*aclara este punto*), sepamos cómo se transforman las componentes conexas de $\mathbb{C}-\gamma_1^*$ en las componentes conexas de $\mathbb{C}-\varphi(\gamma_1^*)$ y $\mathbb{C}-\psi(\gamma_1^*)$ (que, al fin y al cabo, *son las mismas*, por ser $\varphi(\gamma_1^*)=\psi(\gamma_1^*)=\gamma_2^*$).

ii. Encuéntrese una transformación conforme que lleve la región exterior al area común a los círculos $|z\pm 1|\leq\sqrt{2}$ en $\mathbb{C}-\mathbb{D}$ la región exterior al disco unidad.

4. (1.25 puntos) *Responde a las dos propuestas siguientes:*

i. Evalúa la integral

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2-1}dz$$

donde la curva γ es la circunferencia de radio 2 centrada en el origen.

ii. Evalúa la integral

$$\int_\gamma \frac{\operatorname{sen}^2 z}{\left(z-\frac{\pi}{6}\right)^2\left(z+\frac{\pi}{6}\right)}dz$$

donde la curva γ es la circunferencia de radio 4 centrada en el origen.

5. (1.25 puntos) *Responde a la pregunta* "¿Existe alguna elección para $\operatorname{Im} f$ de modo que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, cuando

$$\operatorname{Re} f(z) = |z|^2, \forall z \in \mathbb{C}\ ?"$$

de dos modos distintos:

i. Usa las ecuaciones de Cauchy-Riemann (o de Euler-D'Alembert).

ii. Usa el teorema de Lioville.

6. (1.25 puntos) Prueba que, para cada natural k, la serie de potencias

$$\sum_{n\geq 1} \frac{k}{kn\,(n+1)+1} z^n$$

tiene radio de convergencia 1. Sea f_k la función holomorfa en el disco unidad $\mathbb{D}$ definida por la suma de dicha serie. Prueba que la sucesión (f_k) converge uniformemente en $\mathbb{D}$ y encuentra el desarrollo en serie de Taylor centrado en el origen para la función límite.