Análisis Complejo, Licenciatura de Matemáticas
2^o. Control a Libro-Abierto
(2:00 horas)
15 de mayo de 2007
================================

Lee despacio *todos los enunciados. No te obsesiones con contestar a todas las preguntas. Los* ***razonamientos****, bien* ***engarzados****. Las* ***soluciones*** *bien expuestas:* ***recuadradas,*** *las numéricas. Usa* ***un folio para cada una*** *de tus respuestas a las seis preguntas.*

================================

1. (2.5 puntos) *Sobre funciones armónicas*:

i. Prueba que si f es una función holomorfa en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$, entonces (el teorema de la aplicación abierta garantiza que) ni $|f|$, ni $\operatorname{Im} f$, ni $\operatorname{Re} f$ tienen máximo local en Ω.

ii. Sean f y g holomorfas en un abierto Ω. Supongamos que f es inyectiva. Prueba que, entonces, para cada $z_0 \in \Omega$ y cada $r > 0$ tal que $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$, se tiene que

$$g\left(f^{-1}(w)\right) = \frac{1}{i2\pi} \int_{C(z_0,r)} g(z) \frac{f'(z)}{f(z) - w} dw$$

para cada $w \in f\left(D(z_0, r)\right)$. En particular, si g es la identidad:

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{i2\pi} \int_{C(z_0,r)} z \frac{f'(z)}{f(z) - w} dw, \qquad \forall w \in f\left(D(z_0, r)\right).$$

================================

2. (2.5 puntos) *Sobre desarrollos de Laurent:*

Obténganse todas las posibles expresiones para la función

$$f(z) := \frac{1}{z} + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z+2}$$

mediante desarrollos en series de Laurent centrados, todos, en el origen (¿no era "única" tal expresión...!). Indica dónde es válido cada uno de ellos (lo cual te salva los trastos que se empezaban a romper...).

(*Indicación: serán tres los anillos -centrados en* $z = 0$*- distintos donde trabajar. La descomposición en fracciones simples, te ha sido dada..., para que sólo te tengas que centrar en ese cuadrado del denominador en la segunda de las fracciones...*)

================================

3. (2.5 puntos) (Aplicación de la) *Integración compleja sobre curvas:*

No se te va a pedir, ahora, que pruebes que $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \cos x dx = n!$, pero te va a ser muy útil para probar, y ésto es lo que ahora se te pide, que

$$\int_0^{+\infty} x^{4n+3} e^{-x} \cos x dx = (-1)^{n+1} \frac{(4n+3)!}{2^{2n+2}}.$$

(*Indicación: para "inspirarte" en el problema, búscate una ración conveniente de 1/8 de pizza...*)

==============================

4. (2.5 puntos) (Localización de número de) *Ceros de funciones holomorfas:*

Considera la función polinómica

$$p(z) := z^5 + 15z + 1, \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Calcula el número de ceros que tiene en el disco $D\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Y, ¿cuántos tiene en el $D(0,2)$?