XIV Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas

Vol. I

Puerto de la Cruz 5-9 Junio 1989

UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA
SECRETARIADO DE PUBLICACIONES

MEDIBILIDAD PARA SISTEMAS INTEGRALES NO MONOTONAMENTE CONTINUOS.

Enrique de Amo Artero y Manuel Díaz Carrillo.

Universidad de Granada.

Abstract.

In this paper we give a concept of measurability for scalar functions defined on an arbitrary set $X \neq \emptyset$ in the way of [1] and [3]. We stablish that an I-measurable function which is bounded by an I-integrable function of [3] is also I-integrable. Moreover a caracterization of I-integrability appears.

Clasificación A.M.S. : 28A10, 28A20.

En [1] se generaliza el proceso de prolongación de una integral de Daniell-Bourbaki a partir de un sistema integral (X,B,I), donde B es un retículo vectorial de funciones reales definidas sobre un conjunto arbitrario $X \neq \emptyset$ e I un funcional en B no negativo (sin condición alguna de continuidad).

Una primera extensión está dada por :

$$B^+ := \{ f \in \bar{\mathbb{R}}^X : f = \sup g \;,\; g \in B \;,\; g \leq f \} \setminus \{ -\infty \}.$$

Para $f \in B^+$ se define $I^+(f) := \mathrm{Sup} \{ I(g) : g \in B \;,\; g \leq f \}$ y, dualmente, definimos $B^- := -B^+$ e $I^-(f) := -I^+(-f)$, $\forall f \in B^-$.

La necesidad de que el funcional extendido sea aditivo (I^+ es superaditivo e I^- es subaditivo) nos lleva a definir las clases

$$B_+ := \{ f \in B^+ : I^+(f+g) \leq I^+(f) + I^+(g) \;,\; \forall g \in B^+ \}$$

y $B_- := - B_+$. Ahora I^+ e I^- son aditivos en B_+ y B_- , respectivamente, y coinciden en $B_+ \cap B_-$.

Esto sugiere una extensión de I mediante el uso de las integrales superior e inferior $\bar{I}$ e $\underline{I}$, definidas para toda $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ de la forma usual. Por último se introduce en [1] el conjunto de las funciones I-sumables

$$B_o := \{ f \in \bar{\mathbb{R}}^X : \bar{I}(f) = \underline{I}(f) \in \mathbb{R} \}$$

y la extensión lineal de I : $I(f) := \bar{I}(f) = \underline{I}(f)$, $\forall f \in B_o$.

Considerando $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ si $f(x) + g(x) \in \bar{\mathbb{R}}$ y 0 en otro caso, B_o es un retículo vectorial.

En [3] se introduce la $\bar{I}$-convergencia :

dada una función $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$, se dice que la sucesión $\{ f_n \}_n \subseteq \bar{\mathbb{R}}^X$ $\bar{I}$-converge a f si para toda $0 \le h \in B$ es $\bar{I}(|f-f_n| \wedge h) \to 0$,

y se estudia el conjunto de las funciones I-integrables R(B,I):

una función $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$, se dice I-integrable si existe $\{ h_n \}_n \subseteq B$ I-Cauchy $\bar{I}$-convergente a f, y se define $\tilde{I}(f) := \lim I(h_n)$.

R(B,I) es retículo vectorial, $\tilde{I}$ es lineal en R(B,I) y $B_o \subset R(B,I)$.

B es $\tilde{I}$-denso en R(B,I), ésto es : dada $f \in R(B,I)$ existe $\{ h_n \} \subseteq B$ I-Cauchy tal que $\tilde{I}(|f-h_n|) \to 0$. También se prueba que R(B,I) es cerrado para la $\bar{I}$-convergencia y se presentan teoremas de convergencia de Lebesgue para la clase de las funciones I-integrables.

En esta comunicación presentamos un concepto de medibilidad en relación con los resultados antes descritos.

<u>Definición 1.</u> Una función $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ se dice I-medible si existe una sucesión $\{ h_n \}_n \subseteq B$ $\bar{I}$-convergente a f. Notaremos por M(B,I) al conjunto de todas las funciones I-medibles.

Se sigue de la propia definición que M(B,I) es retículo vectorial y que $R(B,I) \subset M(B,I)$.

Si para $f,g \in \bar{\mathbb{R}}^X$ notamos $f\cap g := (f\wedge g)\vee(-g)$, se verifica que para $f,g,h \in \bar{\mathbb{R}}^X$ es : $|f\cap h - g\cap h| \le 2|f-g|\wedge|h|$. (ver [2]).

Lema 1: Si $f \in M(B,I)$ entonces $f\cap h \in R(B,I)$, para toda $0\le h \in B_0$.

Demostración: Sea $(h_n) \subseteq B$ tal que $\bar{I}$-converge a f. Sea $0\le k \in B$, $0\le h \in B$ y consideramos $(h_n \cap h)_n \subseteq B$. Por la monotonía de $\bar I$ y como $0 \le h\wedge k \in B$ es $(h_n \cap h)$ $\bar I$-convergente a $f\cap h$. Además: $(h_n \cap h)_n$ es I-Cauchy :

$$\bar I(|h_n\cap h - h_m\cap h|) \le 2(\bar I(|h_n - f|\wedge h) + \bar I(|h_m-f|\wedge h)) \to 0;$$

luego $f\cap h \in R(B,I)$ para toda $0\le h \in B$.

Finalmente, como B es denso en B_0: si $0\le h\in B_0$, existe $(k_n) \subseteq B$ tal que $\bar I(|k_n - h|)\to 0$ (corolario 5.7 [1]), de donde, con $f,h,k_n \ge 0$ es $|f\cap k_n - f\cap h| = |f\wedge k_n - f\wedge h| = |k_n\wedge f - h\wedge f| = |k_n\cap f - h\cap f| \le 2|k_n - h|\wedge|f| \le 2|k_n-h|$, luego el resultado buscado. ■

Nota:

Para $f\in\bar{\mathbb R}^X$ y $g\in R(B,I)$ tal que $|f|\le g$ entonces $I_*(f)\in R$, donde $I_*(f) := \operatorname{Sup}\{\tilde I(g) : g\le f,\ g\in R(B,I)\}$. Obsérvese que $-I_*(g) \le I_*(f)\le I_*(g)$ y que $I_* = \tilde I$ en $R(B,I)$. Es de notar que $\underline{I} \le I_*$ en $\bar{\mathbb R}^X$.

Lema 2: Sea $f\in\bar{\mathbb R}^X_+$ tal que $f\cap h\in R(B,I)$, para toda $0\le h \in B_0$ e $I_*(f)\in\mathbb R$, entonces existe $(g_n)_n\subseteq R(B,I)$ $\tilde I$-Cauchy tal que $\bar I$-converge a f.

Demostración: Como $\underline I \le I_*$ en $\bar{\mathbb R}^X$, por definición de $\underline I$ se tiene que existe $(g_n)_n \subseteq B_-$ tal que $\operatorname{Sup}\{I(g_n)\} = \underline I(f) < +\infty$, luego $(g_n)_n \subseteq B_0$ ($\subseteq R(B,I)$). Pero : $0\le \bar I(|g_n-g_m|)\le \bar I(g_n) - \bar I(g_m)\to 0$, e $\bar I = \tilde I$ en B_0 (por [3]), luego $(g_n)_n$ es $\tilde I$-Cauchy.

Resta probar que $\bar{I}$-converge a f; razonemos por reducción al absurdo: Supongamos que existen $0 \le h \in B_0$, $\delta_0 > 0$ y $\{ g_{\sigma(n)} \}$ tales que $\bar{I}(|f-g_{\sigma(n)}| \wedge h) \ge \delta_0$. Pero $|f-g_{\sigma(n)}| \wedge h \in B_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto : $0 \le g_{\sigma(n)}+h \in B_0$ y $f \wedge (g_{\sigma(n)}+h) = f \cap (g_{\sigma(n)}+h)$ $\in R(B,I)$ y está acotada por I-sumable, luego (por [3]) es I-sumable. Finalmente, como $|f-g_{\sigma(n)}| \wedge h = f \wedge (g_{\sigma(n)}+h) - g_{\sigma(n)}$, y B_0 es cerrado para la suma (teorema 5.2 de [1]) se tiene que $|f-g_{\sigma(n)}| \wedge h \in B_0$. Por definición de $\bar{I}$, y por ser $\bar{I} = \underline{I}$ en B_0, existe $\{I_n\} \subseteq B\_$ con $I^-(I_n) < +\infty$ tal que $|f-g_{\sigma(n)}| \wedge h \ge I_n \ge 0$ e $\bar{I}(I_n) \ge \delta_0/2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Pero : $f \ge g_{\sigma(n)} + I_n$, pues $f - g_{\sigma(n)} \ge |f-g_{\sigma(n)}| \wedge h$ y $f \ge g_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, luego por la monotonía de $\bar{I}$ y por ser $\{ I(g_n) \} \to \underline{I}(f)$ se llega a contradicción. ■

<u>Teorema 1:</u> Una función $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ es I-integrable si, y sólo si, f es I-medible e $I_*(f) \in \mathbb{R}$.

<u>Demostración:</u> Los lemas 1 y 2 y que $R(B,I)$ sea cerrado para la $\bar{I}$-convergencia nos dan la suficiencia. La necesidad es evidente.■

<u>Teorema 2:</u> Sean $f \in M(B,I)$ y $g \in R(B,I)$ tales que $|f| \le g$, entonces $f \in R(B,I)$.

<u>Demostración:</u> Sea $0 \le f \in M(B,I)$ y $0 \le h \in B$. Por el lema 1 es $f \cap h \in R(B,I)$. Como $|f| \le g$, aplicando el lema 2 : existe $\{g_n\}_n \subseteq R(B,I)$ $\tilde{I}$-Cauchy tal que $\bar{I}$-converge a f. Como $R(B,I)$, es cerrado para la $\bar{I}$-convergencia se sigue que $f \in R(B,I)$. Si $f \in \bar{\mathbb{R}}^X \cap M(B,I)$, se razona como antes para f^+ y f^-, y por ser $R(B,I)$ retículo vectorial se tiene el resultado. ■

Corolario : Sean $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$, $\{f_n\} \subseteq M(B,I)$ $\bar{I}$-convergente a f y $g \in R(B,I)$ tal que $|f_n| \leq g$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $f \in R(B,I)$ e $\tilde{I}(f) = \lim \tilde{I}(f_n)$.

Demostración: El teorema 2 nos dice que $\{f_n\} \in R(B,I)$. Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue para $R(B,I)$ (en [3]) se tiene el resultado ■

BIBLIOGRAFIA

[1] Bobillo Guerrero, P. y Díaz Carrillo, M.;"Summable and Integrable functions with respect to any Loomis System". Arch. Math. 1987.

[2] Günzler, H. ; "Integration", Mannheim 1985.

[3] Günzler, H. y Díaz Carrillo, M. "Integrabilidad para funcionales no continuos". Preprint 1989.

Enrique de Amo Artero.
Depto. de Análisis Matemático
Colegio Universitario de Jaén.
(Universidad de Granada)
18071 Granada, ESPAÑA.

Manuel Díaz Carrillo.
Depto. de Análisis Matemático
Universidad de Granada.
18071 Granada, ESPAÑA.

I.S.B.N.: 84-7756-240-7, Volumen I. 84-7756-239-3, Obra Completa.
Depósito Legal: TF.: 1.184/90.
Imprime: Secretariado de Publicaciones Universidad de La Laguna.