Una actividad muy relacionada con la anterior consiste en la generación de mosaicos por medio de polígonos regulares.

Actividad 1 (Polígonos regulares): En esta primera actividad los y las estudiantes se familiarizarán con los polígonos regulares y los ángulos internos de estos. Por otro lado, esta actividad permite trabajar los *argumentos por analogía*, manipulando algunos casos conocidos y viendo la estrategia para resolver el problema.

1.1. Como actividad para el aula, podría comenzarse hablando a los estudiantes sobre los polígonos regulares y pedirles que encuentren algunos de ellos en el aula o en lugares comunes, como la casa, etcétera.

1.2. Pueden construirse algunos de ellos, por ejemplo, triángulos equiláteros, cuadrados, pentágonos y hexágonos, con cartulina, goma-espuma o algún otro material (salvo que ya se disponga de algunos modelos físicos de los mismos), y a ser posible con la misma longitud de lado para los diferentes polígonos.

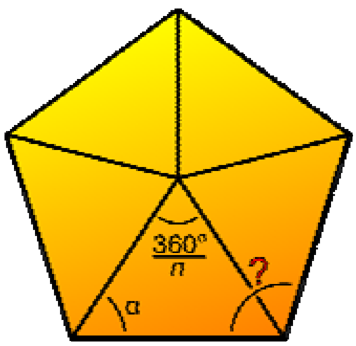
1.3. Sin utilizar el semicírculo graduado (transportador de ángulos) los y las estudiantes sabrán identificar y calcular los ángulos internos de un triángulo equilátero (60º, puesto que la suma de los ángulos de un triángulo es 180º, y en este caso, los tres son iguales) y un cuadrado (todos son ángulos rectos, 90º). Si la figura es un hexágono, se puede dividir en 6 triángulos equiláteros, con un vértice común, y deducir entonces que los ángulos internos del hexágono tienen 120º.

Nota: Dependiendo de las edades se les puede plantear como investigación personal, o en grupos, la demostración de que la suma de los ángulos de un triángulo suman 180º.

1.4. El ejemplo del hexágono da la clave del caso general para calcular el ángulo interno de un polígono de n lados. Se divide el polígono en n triángulos isósceles iguales, con lo que es sencillo calcular el ángulo interno:

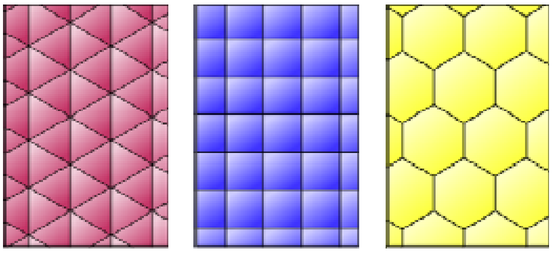
- Al dividir el polígono en triángulos desde el centro, tenemos n triángulos isósceles con un ángulo de $360º/n$.

- Los otros dos ángulos son iguales, por lo tanto $180º = 2\alpha + 360º/n$. Obviamente el ángulo interno es el doble que α, luego
$180º\,(n - 2)/n$.



El ángulo interno.

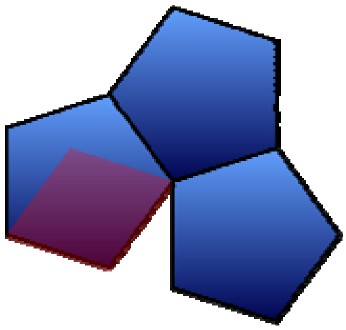
Actividad 2 (Embaldosados regulares):



Los 3 posibles mosaicos regulares

2.1. Una cuestión interesante en relación a los mosaicos es la de las posibles formas que pueden tener las losetas para embaldosar un suelo, pudiéndose buscar ejemplos en la vida real (panales de miel, cocinas, etc.). Probablemente, muchos de los embaldosados planteados sean *regulares*, es decir, construidos con losetas con la forma de un mismo polígono regular, todas ellas del mismo tamaño y pegadas lado con lado. Si se han construido modelos de polígonos regulares de lados iguales en la anterior actividad, se pueden intentar realizar diferentes embaldosados para un hipotético suelo. Si se considera el caso regular seguro que se obtendrán los 3 posibles.

2.2. Tras el intento experimental, es posible que las personas que estén realizando la actividad, por ejemplo estudiantes, ya sean conscientes de que no se pueden construir mosaicos del plano únicamente con pentágonos. Es interesante que busquen una razón para ello (véase la imagen anexa), y que generalicen este hecho a otros polígonos, preguntando, si es necesario, que ocurriría con el heptágono.



Con pentágonos, no.

2.3. La siguiente actividad, y muy interesante a nivel educativo, sería la búsqueda de una prueba formal de este hecho.

La prueba es la siguiente: Si fuese posible cubrir el plano con copias de algún polígono de n lados, entonces alrededor de cada vértice habrá un cierto número de k de éstos polígonos. Por lo que al dividir 360º entre el ángulo interno del polígono se debe de obtener k, el número de estos polígonos, es decir,

$$k = 2n/(n - 2).$$

Para que k sea un número entero, n sólo puede tomar los valores 3, 4 ó 6.

2.4. La demostración anterior no implica que puedan construirse embaldosados con polígonos de n = 3, 4 ó 6 lados, sino que, en caso de existir, son las únicas posibles. Sin embargo, se sabe que sí existen ya que se han construido explícitamente en 2.1. Con esto, se pueden trabajar competencias transversales de lógica: condición necesaria contra condición suficiente.

Actividad 3 (Embaldosados uniformes): Una vez introducidos los embaldosados o mosaicos regulares, es natural preguntarse qué ocurre si se permite no sólo un polígono regular, sino combinaciones de polígonos regulares de diferente número de lados (con los lados del mismo tamaño para que peguen bien las losetas). Será necesario añadir alguna condición.

3.1. Se podría trabajar con embaldosados uniformes: son aquellos en los que alrededor de un vértice se tiene la misma configuración de polígonos regulares. De nuevo pueden intentarse construir ejemplos prácticos de embaldosados uniformes con los polígonos anteriormente construidos.

3.2. Para alumnos y alumnas con más interés, podría trabajarse la demostración de que existen 8 embaldosados uniformes. El procedimiento es similar al hecho para los mosaicos regulares pero no enteramente igual.

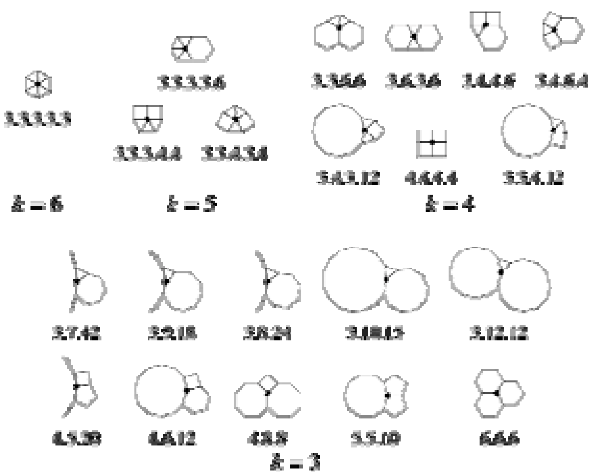
Para empezar puede suponerse que alrededor de un vértice se tienen k polígonos regulares. Este número ha de ser menor o igual que 6, ya que el polígono regular de menor ángulo interior es el triángulo. Obviamente, tampoco será 1 ni 2. Por otro lado la suma de sus ángulos internos será

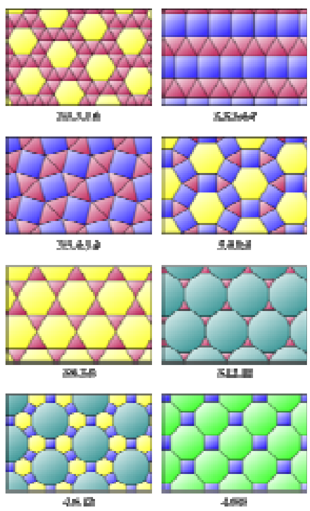
$$360º = 180º \left((n_1 - 2)/n_1 + \cdots + (n_k - 2)/n_k \right).$$

Operando se llega a

$$(k - 2)/2 = 1/n_1 + \cdots + 1/n_k.$$

Haciendo variar k entre sus posibles valores (3, 4, 5 y 6) y con cierto trabajo, se pueden encontrar 17 soluciones enteras de esta ecuación. Algunas de estas soluciones pueden reordenarse de varias maneras, obteniendo 21 posibles configuraciones (véase imagen adjunta). No todos estos motivos producen embaldosados del plano: por inspección podemos llegar a los 8 mosaicos uniformes de la imagen (obviando los ya conocidos regulares).





Las 21 configuraciones

Actividad 4 (Construcción de mosaicos *a la* Escher): Evidentemente se pueden construir embaldosados muy vistosos con polígonos coloreados. Claro que los mosaicos de Escher, u otros similares, resultan mucho más atractivos. Se pueden construir mosaicos de este tipo de manera sencilla. Se empieza con un embaldosado regular. Dependiendo de la elección y de las simetrías que se espera que tenga el mosaico se podrán utilizar diferentes herramientas. Así, según cómo se copien los lados deformados, se obtendrán unos grupos cristalográficos u otros como simetrías del mosaico final.

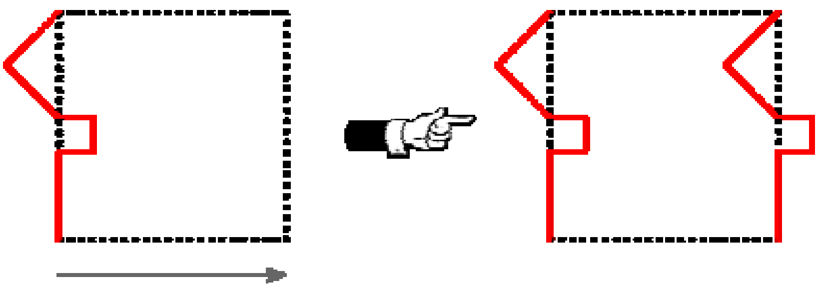
4.1. Para trabajar en un aula, sería interesante presentar al alumnado algunos trabajos de Escher o similares con mosaicos periódicos. Con estos se puede introducir la noción de *región fundamental*, un paralelepípedo que permite obtener todo el mosaico por traslación. Esta región no es única, y depende de las traslaciones que se elijan. Puede ser interesante presentar esta región en algunos de los mosaicos anteriores.

4.2. Se escogerá un mosaico regular, por ejemplo por cuadrados, y se identificarán *todas* sus simetrías, que pueden ser algunas de las siguientes:

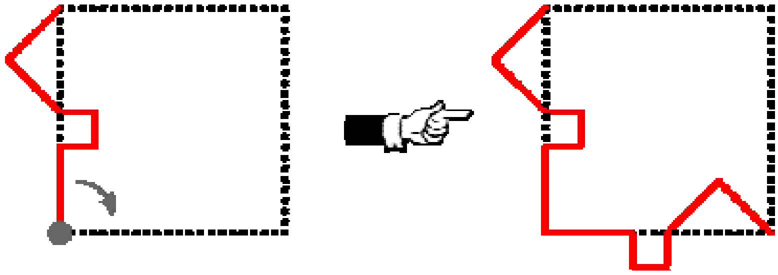
- Giros de 90, 180 y 270 grados en vértices y en el centro de las losetas.
- Giros de 180º centradas en los puntos medios de las aristas.
- Reflexiones con ejes sobre las líneas del mosaico y las rectas que pasan por el centro de las losetas.
- Las traslaciones obvias.
- Las simetrías con deslizamiento: primero se realiza una traslación y luego una reflexión con eje perpendicular a la dirección de traslación.

4.3. Algunas de estas simetrías permitirán construir losetas que cubren el plano de manera más atractiva. Serán útiles aquellas que lleven lados del cuadrado sobre lados del cuadrado.

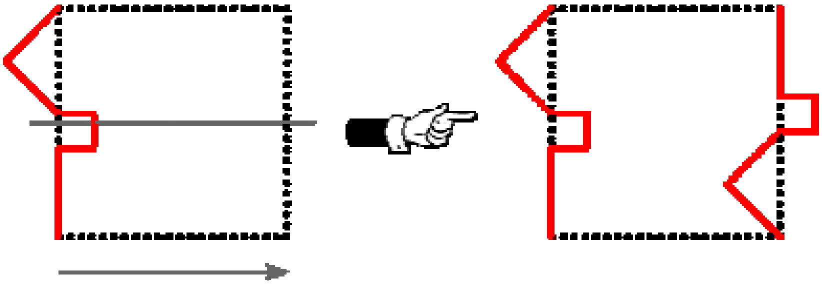
- *Traslaciones*: Basta seleccionar un lado y copiarlo en el lado de enfrente mediante una traslación.



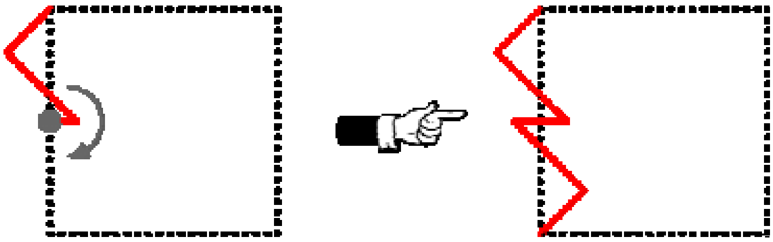
- *Giros de 90º alrededor de un vértice*: Se rota un lado, de manera que se envíe sobre otro.



- *Reflexiones con deslizamiento*: El eje de reflexión atraviesa el lado que se quiere "duplicar", y la traslación lleva ese lado sobre otro paralelo



- *Giros de 180º alrededor del punto medio de un lado*: Estos movimientos son algo menos interesantes.



Si se combinan varias simetrías, es conveniente que estas sean compatibles, por ejemplo, si se combina una traslación y un giro, el trasladado del centro de giro debería ser también un centro de giro.

Por último, una vez construida la loseta, se utilizan los mismos movimientos rígidos para replicarla hasta cubrir el plano.

Un ejemplo paso a paso. En primer lugar se usa un giro de 90º para replicar el lado negro (véase la figura superior izquierda de la imagen siguiente). Después, se replica de nuevo este lado mediante una reflexión con deslizamiento como en la figura superior central de la imagen. Sólo resta cubrir un lado. Ahora bien, la imagen por la reflexión por deslizamiento del centro de giro también lo será. Esto fuerza la forma del último lado. Puede verse el resultado en la ilustración inferior de la imagen.

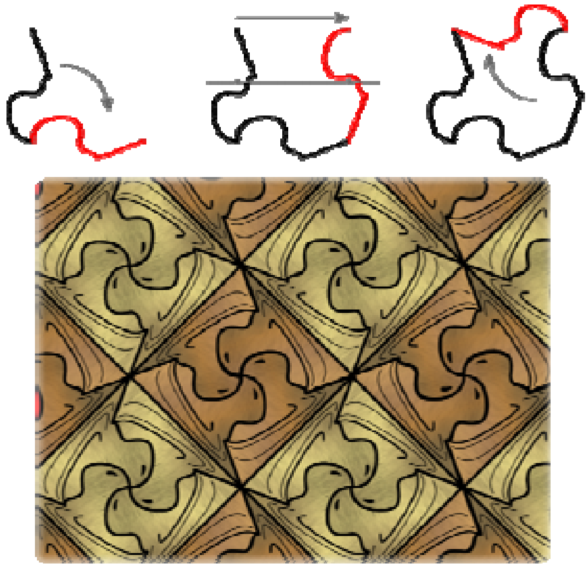


Figura 1. Un ejemplo de mosaico

Puede verse también en la siguiente imagen un ejemplo construido mediante dos traslaciones. Obsérvese que la loseta no se cierra, esto se debe a que los lados elegidos no terminan sobre los vértices. Aún así, es sencillo construir un verdadero mosaico.

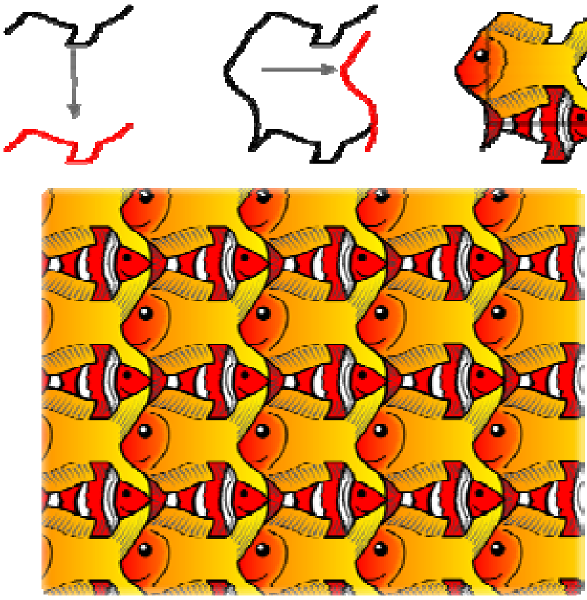


Figura 2. Otro ejemplo de mosaico.

Y en este momento los y las estudiantes que estén realizando la actividad ya estarían en condiciones para crear sus propios mosaicos a la Escher.

4.4 Podría plantearse ahora una investigación, qué movimientos se podrían hacer en el caso de los mosaicos por triángulos o hexágonos (los movimientos son análogos). Incluso, podría trabajarse con mosaicos de una sola loseta que no sea un polígono regular.