3. CONOCIENDO EL PROGRAMA SURFER

El programa SURFER es un programa desarrollado por la Universidad Técnica de Kaiserslautern y el Instituto de Investigación Matemática Oberwolfach de Alemania, para la exposición Imaginary. Este programa permite crear y visualizar fácilmente imágenes de superficies algebraicas. Se puede descargar gratuitamente desde la página www.rsme-imaginary.es.

La mejor forma de conocer un programa es jugar con él. De la misma forma que los niños y niñas aprenden los números, o a hablar, de una forma natural y sin que los progenitores, o ellos mismos, se lo planteen como la adquisición de una serie de conocimientos, así deben familiarizarse los y las estudiantes con el programa SURFER. Sin plantearse seriamente el conocimiento matemático que subyace en este programa y dejando paso a la intuición, a la imaginación y al juego.

Las personas que se acerquen por primera vez al SURFER deberán empezar con expresiones algebraicas sencillas sobre las que ir introduciendo cambios poco a poco con el objetivo de observar las variaciones que producen estos en la imagen de la superficie. En eso consiste esta actividad.

Nota: una característica significativa del SURFER es que la imagen mostrada por el programa es la parte de la superficie que está dentro de una esfera invisible, y que acercar o alejar la imagen (mediante un zoom) sólo aumenta o disminuye el radio de esa esfera.

En esta actividad se describen algunas expresiones algebraicas y se recomiendan algunas manipulaciones con el objetivo de irse familiarizando con el programa:

Expresión algebraica 1: $x^2 - a = 0$; esta ecuación representa dos planos paralelos cuando $a \neq 0$, y un solo plano cuando $a = 0$.

(El programa SURFER permite la inclusión de dos variables "a" y "b", y cuyo valor, que varía entre 0 y 1, puede modificarse con una barra horizontal que aparece bajo la imagen de la superficie.)

Expresión algebraica 2: $x^2 + y^2 - a = 0$; es un cilindro que degenera en una recta para $a = 0$, que por su "delgadez" no se verá. ¿Qué ocurre si se cambian los exponentes de la x y/o de la y, por otros números? ¿Hay diferencia entre utilizar exponentes pares e impares? ¿Qué ocurre si se multiplica a x^2 por una constante, por ejemplo *10, 1.000* o *100.000*?

Expresión algebraica 3: $x^2 - y^2 - a = 0$; es un cilindro hiperbólico, es decir, con sección una hipérbola, que degenera en dos planos perpendiculares. Como $x^2 - y^2 - a = (x-y)(x+y) - a$, entonces la superficie es esencialmente la misma que $xy - a = 0$, sin más que efectuar un pequeño cambio de coordenadas, luego puede considerarse también esta.

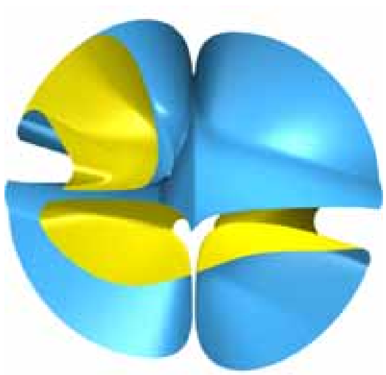
¿Qué ocurre si se cambian los exponentes de la x y/o de la y? ¿Hay diferencia entre exponentes pares e impares? ¿Qué ocurre si se multiplica a x^2 (resp. a xy) por una constante? ¿Y si ahora se añade la variable z, es decir, se considera la superficie $xyz - a = 0$, y de nuevo se realizan modificaciones?

Expresión algebraica 4: a continuación, se pueden considerar, como base de este aprendizaje, diferentes superficies cuadráticas sencillas: esfera ($x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$), hiperboloide de una hoja ($x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$), paraboloide ($x^2 + y^2 - z = 0$), paraboloide hiperbólico ($x^2 - y^2 - z = 0$),... y en general, analizar las expresiones del tipo

$$Ax^2 \pm By^2 \pm Cz^2 = a$$

modificando incluso los coeficientes de las variables x, y, z.

Expresión algebraica 5: El siguiente paso sería considerar los ejemplos, algo más complejos, de superficies algebraicas que nos ofrece la galería de SURFER: singularidades simples, superficies record, superficies notables I y II.

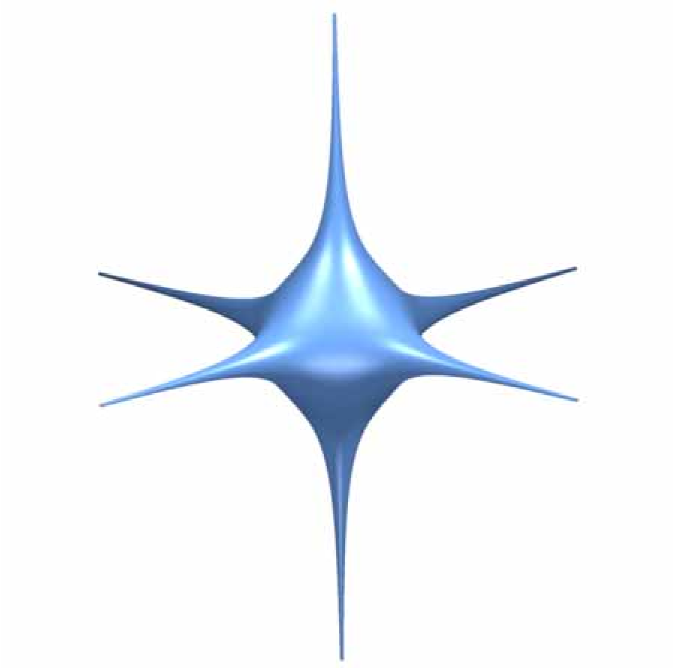


$10x^3 - y^{23} - a = 0$

cubo redondeado: $x^6 + y^6 + z^6 - 1 = 0$

Un ejemplo podría ser "el destello" (Distel en la galería). Para construirla se empieza con la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, a la que se le añade la expresión $(x^2 + y^2)(x^2 + z^2)(y^2 + z^2)$, multiplicada por un número alto, por ejemplo 10^5:

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right) + 10^5\left(x^2 + y^2\right)\left(x^2 + z^2\right)\left(y^2 + z^2\right) = 0.$$



Y una vez más sería interesante el análisis de los efectos que producen en la superficie cambios en la expresión algebraica, como los sugeridos a continuación.

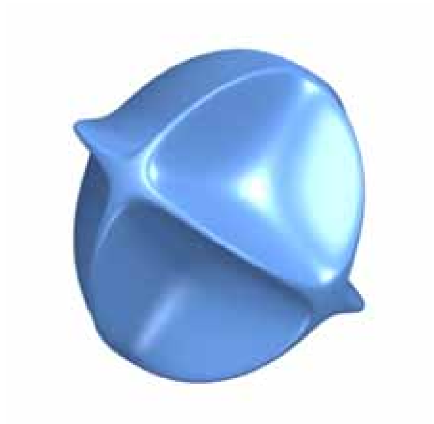
i) modificar el valor de la constante 10^5;

ii) cambiar uno (o varios) de los signos + de la expresión añadida por un signo −, por ejemplo, $(x^2 - y^2)$ en lugar de $(x^2 + y^2)$;

iii) cambiar uno (o varios) de los signos + de la expresión añadida por un signo de multiplicación, por ejemplo $(y^2 z^2)$ en lugar de $(y^2 + z^2)$;

iv) cambiar una (o varias) de las tres expresiones $(x^2 + y^2)$, $(x^2 + z^2)$ y $(y^2 + z^2)$ por solo una de las variables al cuadrado, por ejemplo, por x^2, z^2 e y^2;

v) ¿podría modificarse la ecuación para que el destello tenga solamente cuatro puntas?



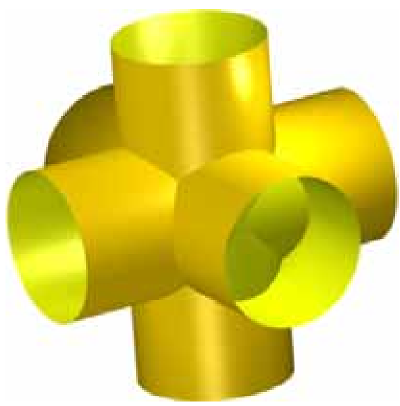
La bola desinflada: $(x^2+y^2+z^2-1)+10^5(x^2y^2)(x^2z^2)(y^2z^2)=0.$

A continuación, algunos sencillos trucos de iniciación en el programa SURFER:

Truco 1 (Unión de superficies algebraicas): Este permite mostrar dos, o más, superficies algebraicas a un mismo tiempo. Sea $f(x,y,z)=0$ la ecuación algebraica que define la primera superficie y $g(x,y,z)=0$ la de la segunda, entonces pueden mostrarse las dos superficies al mismo tiempo mediante la multiplicación de ambas expresiones algebraicas $f(x,y,z)g(x,y,z)=0$.

Como ejemplo, la unión de tres cilindros perpendiculares se obtiene mediante la expresión algebraica

$$(x^2+y^2-1)(x^2+z^2-1)(y^2+z^2-1)=0.$$



Además, con un sencillo cambio pueden fundirse las superficies consideradas. Simplemente hay que restarle la variable "*a*" a la ecuación (SURFER permite modificar el valor de *a*, entre 0 y 1).

$$(x^2+y^2-1)(x^2+z^2-1)(y^2+z^2-1)-a=0.$$

¿Podrían, a partir de esto, dibujarse los tres ejes coordenados?

Truco 2 (Intersección de superficies algebraicas): Dadas dos superficies algebraicas $f(x,y,z)=0$ y $g(x,y,z)=0$, se puede considerar la intersección de ambas introduciendo en Surfer la expresión $f(x,y,z)^2+g(x,y,z)^2=0$.

A modo de ejemplo, se describe la curva de Viviani. Esta es la curva que se obtiene como intersección de un cilindro de radio 1 centrado en el punto (1, 0, 0) y la esfera centrada en el origen (0, 0, 0) y de radio 2 (véase la imagen). Sin embargo, si se introduce en el SURFER la ecuación

$$\left((x-1)^2+y^2-1\right)^2+\left(x^2+y^2+z^2-1\right)^2=0$$

no se verá nada. El motivo es que la curva no tiene grosor y por eso no se aprecia. Para mostrarla de nuevo hay que restarle la variable "*a*" a la ecuación.

$$\left((x-1)^2+y^2-1\right)^2+\left(x^2+y^2+z^2-1\right)^2-a=0.$$

En particular, este truco permite representar curvas obtenidas como intersección de dos superficies.