

## Problemas números combinatorios

1. De cuantas maneras se pueden colocar  $k$  bolas negras entre  $n$ , ( $k < n$ ), bolas blancas sin que haya dos bolas negras seguidas.

2. En el desarrollo de  $(\frac{1}{3} + \frac{3}{4}x)^{10}$  ¿Cual es el coeficiente más grande?

3. a) Probar que existen  $\binom{n-1}{k-1}$  soluciones enteras positivas a la ecuación  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ .

b) Probar que existen  $\binom{n+k-1}{k-1}$  soluciones enteras no negativas a la ecuación  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ .

c) Probar que existen  $\binom{n-km-1}{k-1}$  soluciones enteras positivas a la ecuación  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$  si todos  $x_i > m$ .

4. Sean  $n, k \in \mathbf{N}$  con  $k + 3 \leq n$ . Prueba que  $\binom{n}{k}, \binom{n}{k+1}, \binom{n}{k+2}, \binom{n}{k+3}$  no pueden formar parte de una progresión aritmética.

5. Probar que  $\binom{n}{i}\binom{i}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j}$  (Identidad de Newton).

6. Probar que (Convolución de Vandermonde)

$$\sum_{a+b=k} \binom{n}{a} \binom{m}{b} = \binom{n+m}{k}$$

7. Probar que  $\sum_{k=0}^{3n} \binom{6n}{2k} (-3)^k = 2^{6n}$ .

8. Encontrar el número de soluciones enteras no negativas de la inecuación  $a + b + c + d \leq 2001$ .

9. Probar que

$$\binom{n+k+1}{n+1} = \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \dots + \binom{n+k}{n}$$

10. Probar que

a)

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

b) Para  $n$  impar

$$\binom{n}{0}^2 - \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 - \dots + (-1)^n \binom{n}{n}^2 = 0$$

y si  $n = 2k$  es igual a  $(-1)^k \binom{2k}{k}$ .

11. Probar que  $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$ .

12. Calcular

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

13. Calcular

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \cdots$$

y

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \cdots$$