Problemas de teoría de números elemental

1. Demostrar que si 7 no divide a n, entonces 7 divide a $n^{12}-1$.

2. Demostrar que $\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+\frac{7n}{15}$ es un entero para cualquier n.

3. Demostrar que para cualquier entero n, $n^9+2n^7+3n^3+4n$ es divisible por 5.

4.Demostrar que para cualquier n, $n^{111}\equiv n\,(mod\,11)$.

5. Sea $m=2^{15}-1=32767$. Demostrar que:
i) El orden de 2 módulo m es 15.
ii) 15 no divide a $m-1$.
¿Por qué esto implica que m no es primo?.

6. Sea $p\geq 7$ un primo. Demostrar que p divide al menos un número del conjunto

$$\{11, 111, 1111, 111111, \ldots\}.$$

7. a) Demostrar que 9 es de orden 2 módulo 511.
b) Demostrar que si 511 fuera primo, entonces 9 tendría que dividir a 510, como esto no es así deducimos que 511 es compuesto.

8. Sea $m=2^{2^e}+1$.
i) Demostrar que 2 tiene orden 2^{e+1} módulo m.
ii) Sea p un divisor primo de m. Demostrar que $2^{2^e}\equiv -1(mod\,p)$, por tanto el orden de 2 módulo p es 2^{e+1}.
iii) Usando el teorema de Fermat, demostrar que cualquier divisor primo p de m satisface $p-1=k2^{e+1}$ para algún k, por tanto $p=1+k2^{e+1}$.

9. Demostrar que el producto de n números naturales consecutivos es divisible por $n!$.

10. Probar que para cualquier n, 33 divide a $n^{101}-n$.

11. Encontrar el menor entero positivo k tal que $a^k\equiv 1\,(mod\,756)$ para cada entero positivo a que es primo relativo a 756.

12. ¿Cual es el resto al dividir por 9 del número 725843^{594}?. ¿Y de $7574632^{2845301}$ al dividirlo por 11?.

13. a)Probar que 5 divide a $17^{4n+1}+3\times 9^{2n}$ para todo $n>0$.
b) Probar que 170 divide a $153^n+45^n-28^n$.

14. Probar que si $n \geq 2$, entonces $2^n - 1$ no es divisible por n. (Nota. Considere el menor primo p que divide a n y la ecuación $2^n = 1\,(mod\,p)$.

15. Sean x, y números enteros. Probar que $2x + 3y$ es divisible por 17 y sólo si $9x + 5y$ es divisible por 17.

16. Encontrar un d tal que d divida a $n^2 + 1$ y a $(n+1)^2 + 1$.

17. Probar que $\frac{5n+3}{8n+5}$ y $\frac{33n+4}{22n+3}$ son fracciones irreducibles.

18. Si 7 divide a $a^2 + b^2$ entonces 7 divide a a y a b.

19. Probar que $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ con n impar es divisible por 10.

20. Probar:
a) 5 divide a $n^2 - 3n + 6$.
b) 6 divide a $n^3 + 3n^2 + 2n$.
c) Determinar n sabiendo que 7 divide a $n^3 + n - 2$.

21. Determinar n sabiendo que 7 divide a $2^{2n} + 2^n + 1$.

22. Si $T_n = 2^{2^n} + 1$. Sin $n \neq m$ probar que T_n y T_m son primos entre sí.

23. Probar que si p es primo, entonces p divide a $2^p - 2$.

24. Si $a^n + 1$ es primo , probar que a es par y $n = 2^k$.

25. Probar que existen infinitos primos de la forma $4k - 1$ donde k es un número natural.

26. Sea $a_n = 100 + n^2$ y $d_n = mcd(a_n, a_{n+1})$. Encontrar el máximo valor de d_n.

27. Calcule el máximo común divisor de $n! + 1$ y $(n+1)!$.

28. Probar que $mcd(a^m - 1, a^n - 1) = a^{mcd(m,n)} - 1$.

29. Sea $p > 2$ un número primo y a, b números enteros positivos primos entre sí. Probar que

$$mcd(a + b, \frac{a^p + b^p}{a + b}) = 1 \text{ o es } p.$$

30. Sea $n > m \geq 1$. Probar que

$$\frac{mcd(m, n)}{m} \binom{m}{n}$$

es un número entero.

31. Encontrar dos números enteros a, b verificando que

$$\frac{a^2+b}{b^2-a} \text{ y } \frac{b^2+a}{a^2-b}$$

son enteros.

32. Encontrar los pares de números enteros positivos (x, y) verificando que $xy^2 + y + 7$ divide a $x^2y + x + y$.

33. Si $n \geq 3$ es un entero, probar que

$$n^{n^{n^n}} - n^{n^n}$$

es divisible por 1989.

34. ¿Cuántos múltiplos de 1001 pueden expresarse de la forma $10^j - 10^i$ con $0 \leq i < j \leq 99$.

35. Si p es un número primo, entonces cada divisor de $2^p - 1$ es más grande que p.

36. Sea p un primo impar y q, r primos. Probar que si p divide a $q^r + 1$, entonces $2r$ divide a $p - 1$ ó p divide a $q^2 - 1$.

37. Sean $a > 1$, n un número entero positivo y p un número primo impar. Probar que si p divide a $a^{2^n} + 1$, entonces 2^{n+1} divide a $p - 1$.

38. Sea n un entero positivo mayor que 2. Entonces n no divide a $2^n - 1$.

39. Encontrar los primos p y q que verifican que pq divide a

$$(5^p - 2^p)(5^q - 2^q).$$

40. Sean m, n dos números enteros verificando $1 \leq m < n$. Se tiene que los tres últimos dígitos de 1987^m son iguales a 1978^n. Encontrar m, n de manera que $m + n$ sea mínimo.