SESIÓN 2: ARITMÉTICA

PRINCIPIO DE INDUCCIÓN
SISTEMAS DE NUMERACIÓN
DIVISIBILIDAD

Pares e impares
Primos y compuestos
Números consecutivos
Criterios de divisibilidad
Congruencias

a es congruente con **r** módulo **b** si al dividir **a** entre **b** da de resto **r**

Dados tres números consecutivos, al menos uno de ellos es divisible entre 2

Dados tres números consecutivos, exactamente uno es divisible entre 3

Pruebe que n(n + 1)(n + 2) es múltiplo de 6 para cualquier entero n.
Pruebe que n(n+1)(n+2)(n+3) es múltiplo de 24 para cualquier

Descomposición de un número en factores primos
Cálculo del número de divisores de un número
Si $N=p_1^{x_1}\cdot p_2^{x_2}\dots p_n^{x_n}$ siendo p_i números primos, el número de

divisores de N es $(x_1+1)\cdot(x_2+1)\dots(x_n+1)$, incluyendo al 1 y a N

TRIÁNGULO DE TARTAGLIA

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$, y así sucesivamente colocamos los números del triángulo, las potencias de ***a*** en orden decreciente y las de **b** en orden creciente.

OTRAS IDENTIDADES
$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$
$a^3-b^3=(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$
$a^4-b^4=(a-b)\cdot(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$

SUCESIONES DE NÚMEROS REALES
Progresiones aritméticas y geométricas
Sucesiones recurrentes

Progresiones aritméticas: Sucesiones de números reales en las que cada término se diferencia del anterior en la misma cantidad, **d (Diferencia)**

$a_1,\ a_1+d,\ a_1+2\mathrm{d},\ldots$ Término general de una progresión aritmética

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$ Fórmula que sirve para calcular cualquier término conociendo el primero y la diferencia.

Para calcular la suma de los **n** primeros términos de una progresión aritmética utilizamos la fórmula $S_n = (a_1 + a_n)\cdot\frac{n}{2}$

Progresiones geométricas: Sucesiones de números reales en las que cada término se obtiene multiplicando el anterior por **r (Razón)**

$a_1,\ a_1\cdot r,\ a_1\cdot r^2,\ldots$ El término general será $a_n = a_1\cdot r^{n-1}$

La suma de los **n** primeros términos de una progresión geométrica es
$S_n = \frac{a_n\cdot r - a_1}{r-1}$

La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón $-1 < r < 1$ es

$S = \frac{a_1}{1-r}$

PROBLEMAS

Problema: Si a es un número impar, demuestra que $a^4+4a^3+11a^2+6a+2$ es múltiplo de 4

Problema: Demuestra que la siguiente expresión es siempre cierta para cualquier entero positivo

$1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ (Por inducción)

Problema: Demuestra que para la expresión 5^n+3 es par para cualquier entero positivo. (Por inducción)

Problema: Demuestra que 17 es divisor de 2m + 3n si y solo si 17 es divisor de 9m + 5n
Problema: Demuestra que $n^{19}-n^7$ es divisible por 30

Problema: Demuestra que n^3-n es divisible por 3

Problema: Demuestra que $A_n=5^n+2\cdot 3^{n-1}+1$ es múltiplo de 8 para todo entero positivo

Problema: Sea m número natural. Probar que si 2^m+1 es primo y mayor que 3 entonces m es par necesariamente.

Resolución:
Lo demostramos por **"Reducción al absurdo**" (suponiendo lo contrario de lo que hay que demostrar y llegando a una contradicción con la hipótesis).

Supongamos que m es impar, es decir $m=2k+1$ con **k** natural, entonces $2^m+1=2^{2k+1}+1=4^k\cdot 2+1=2(3+1)^k+1$ y desarrollando $(3+1)^k$ por el triángulo de Tartaglia (Binomio de Newton), quedará $3^k+h\cdot 3^{k-1}+\ldots+1^k$, luego $2^m+1=2(3r+1)+1=6r+2+1=3(2r)+3=3(2r+1)$ Contradicción

Problema: Demuestra que la expresión $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}+\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$ es un número entero.

Resolución:

Llamamos N al número anterior $N=\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}+\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$ y elevando ambos miembros al cubo obtenemos:

$$N^3=45+29\sqrt{2}+45-29\sqrt{2}+3\left(\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}\right)^2\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}+3\left(\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}\right)^2\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}$$

Y desarrollando obtenemos:

$$N^3=90+3\left(\sqrt[3]{(45+29\sqrt{2})(45-29\sqrt{2})(45+29\sqrt{2})}\right)+3\left(\sqrt[3]{(45-29\sqrt{2})(45+29\sqrt{2})(45-29\sqrt{2})}\right)$$

$$N^3=90+3\left(\sqrt[3]{(45^2-29^2\cdot 2)(45+29\sqrt{2})}\right)+3\left(\sqrt[3]{(45^2-29^2\cdot 2)(45-29\sqrt{2})}\right)$$

$$N^3=90+3\left(\sqrt[3]{343(45+29\sqrt{2})}\right)+3\left(\sqrt[3]{343(45-29\sqrt{2})}\right)$$

$$N^3=90+3\left(\sqrt[3]{7^3(45+29\sqrt{2})}\right)+3\left(\sqrt[3]{7^3(45-29\sqrt{2})}\right)$$

$$N^3=90+21\left(\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}+\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}\right)$$

$N^3=90+21N$ y resolviendo esta ecuación de grado 3 por la Regla de Ruffini obtenemos $N=-6$

Problema: Demuestra que la expresión siguiente es siempre divisible por 24, siendo n entero

$$\frac{n^5-5\mathrm{n}^3+4\mathrm{n}}{n+2}$$

Problema: El numero N es múltiplo de 83 y N^2 tiene 63 divisores. Busca el menor número que cumple las condiciones

Resolución:

Supongamos que N se descompone como $N=83\cdot x \Rightarrow N^2=83^2\cdot x^2$ $N=2^a\cdot 3^b\cdot 5^c\ldots 83^r$

, entonces $N^2=2^{2\mathrm{a}}\cdot 3^{2\mathrm{b}}\cdot\ldots 83^{2\mathrm{r}}$

$(2\mathrm{a}+1)\cdot(2\mathrm{b}+1)\cdot\ldots\cdot(2\mathrm{r}+1)=63$

$63=7\cdot 9=7\cdot 3\cdot 3$

Tenemos diferentes posibilidades:

r=31

a=3 b=4

a=4 b=3

r=4 c=3 etc.

El menor número se obtendrá con r=1, a=3 y b = 1. Es decir, $N=2^3\cdot 3\cdot 83$

Problema: Sea p entero positivo tal que 2^p-1 es primo. Probar que la suma de todos los divisores de $2^{p-1}(2^p-1)$ es igual a $2^p(2^p-1)$

Resolución:
Sea $N=2^{p-1}(2^p-1)$; los divisores del primer factor son: $1,\ 2,\ 2,^2\ldots 2^{p-1}$ y los del segundo factor, por ser número primo, serán $1\ y\ 2^p-1$. Por tanto los divisores de N serán todos los anteriores y sus productos:

$2^p-1,\ 2(2^p-1),\ 2^2(2^p-1),\ldots,2^{p-1}(2^p-1)$

Y su suma será:
$S=1+2+\ldots+2^{p-1}+2^p-1+2(2^p-1)+\ldots+2^{p-1}(2^p-1)=$