Olimpiada Matemática Española RSME

LIII OLIMPIADA MATEMÁTICA

SESIÓN: 21 de Octubre de 2016

GEOMETRÍA

Profesor: José María Lirola Terrez

GEOMETRÍA DEL TRIÁNGULO

Puntos notables del triángulo

Nombre	Corte de	Nomenclatura	Circunferencia	Radio
Circuncentro	Mediatrices	O	Circunscrita	Circunradio
Incentro	Bisectrices	I	Inscrita	Inradio
Ortocentro	Alturas	H		
Baricentro	Medianas	G		
Exincentros	Bisectrices ángulos exteriores	E_A	Exinscritas	Exradio

* Las medianas dividen al triángulo en dos triángulos de igual área.
* El baricentro está situado a $\frac{2}{3}$ del vértice correspondiente.
* En un vértice las bisectrices de los ángulos interiores y exteriores son perpendiculares.

Área del triángulo

* En función de la base y la altura: $\boxed{S = \frac{1}{2}b.h}$.
* En función del radio de la circunferencia inscrita: $\boxed{S = r.p}$ (donde: r el radio y p el semiperímetro)
* En función del radio de la circunferencia circunscrita: $\boxed{S = \frac{a.b.c}{4R}}$ (donde R es el radio y a,b,c los lados)
* En función de dos lados y el ángulo que determinan: $S = \frac{1}{2}.a.b.sen\widehat{C}$.

Teoremas fundamentales

1.- **Teorema de Pitágoras** (siglo VI a.C) : "En un triángulo rectángulo de catetos a y b, y de hipotenusa c, se cumple: $c^2 = a^2 + b^2$".

2.- a) **Teorema de Thales** (625-547 a.C):"Dado un triángulo ABC, si trazamos un segmento paralelo al lado BC, se obtiene un triángulo AB'C' cuyos lados son proporcionales a los del triángulo ABC:

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{BC'}$$ ".

b) **Variante del teorema de Thales:** "Si dos rectas cualesquiera r y s, se cortan por varias rectas paralelas, los segmentos determinados en una de ellas son proporcionales a los determinados en la otra recta:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$ ".

3.- **Sobre triángulos rectángulos inscritos en una circunferencia:**

a) **Teorema:** "Sea B un punto de una circunferencia de diámetro AC. Entonces el triángulo ABC es rectángulo en B".

b) **Corolario 1:** "En todo triángulo rectángulo la longitud de la mediana correspondiente a la hipotenusa es siempre la mitad de la hipotenusa".

c) **Corolario 2:** "La circunferencia circunscrita a todo triángulo rectángulo tiene como radio la mitad de la hipotenusa y el circuncentro es el punto medio de la hipotenusa".

4.- **Teorema del seno:** "En todo triángulo se verifica: $\frac{a}{sen\widehat{A}} = \frac{b}{sen\widehat{B}} = \frac{c}{sen\widehat{C}} = 2R$ donde R es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo".

5.- **Teorema del coseno:** "En todo triángulo se verifica: $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\widehat{A}$ ".

6.- **Teorema de la bisectriz:** "Dado el triángulo ABC. Sea AD la bisectriz del ángulo interno $\widehat{A}$. Entonces se cumple la proporción: $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$".

7.- **Teorema de Stewart** (Escocés, 1717-1785): "Dado el triángulo ABC. Sea D un punto del lado BC. Entonces se cumple: $d^2.a = b^2.m + c^2.n - m.n.a$ donde: m=BD, n=CD, d=AD ".

8.-**Teorema de Apolonio** (El gran geómetra, 262-190 a.C): "En cualquier triángulo ABC se cumple: $a^2 + b^2 = \frac{c^2}{2} + 2.M_C^2$ (siendo M_C la mediana del lado C)".

9.- **Distancia entre circuncentro e incentro:**

a) **Teorema de Euler** (Suizo, 1707-1783): "En un triángulo cualquiera ABC, la distancia entre el circuncentro y el incentro (d) cumple la igualdad: $d^2 = R^2 - 2.R.r$ (donde R es el radio de la circunferencia circunscrita y r el de la inscrita)".

b) **Desigualdad de Euler:** " Para un triángulo cualquiera se cumple la desigualdad: $R \geq 2r$ ".

10.- Desigualdad triangular: "En todo triángulo la longitud de un lado es menor que la suma de las longitudes de los otros dos".

11.- **Fórmula de Herón** (siglo I d.C): "El área de un triángulo de lados a,b y c es: $S = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}$ donde p es el semiperímetro del triángulo".

12.- **Recta de Euler:** "En todo triángulo están alineados el: ortocentro (H), el baricentro (G) y el circuncentro (O) ". La recta que los contiene recibe el nombre de recta de Euler.

Igualdad de triángulos

1.- Concepto: "Dos triángulos diremos que son iguales si tienen los mismos lados y los mismos ángulos".

2.- Criterios de igualdad: Dos triángulos serán iguales si:

a) tienen iguales un lado y sus ángulos adyacentes.
b) tienen iguales dos lados y el ángulo comprendido.
c) tienen iguales los tres lados.

Semejanza de triángulos:

1.- **Concepto:** "Dos triángulos diremos que son semejantes si tienen los ángulos iguales y los lados Proporcionales". $\widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{B} = \widehat{B'}, \widehat{C} = \widehat{C'}$; $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k$, K es la razón de proporcionalidad.

2.- **Criterios de semejanza:** Dos triángulos serán semejantes si:

a) tienen dos ángulos iguales.
b) tienen los lados proporcionales.
c) tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales.

3.- **Posición de Thales:** "Dos triángulos diremos que están en la posición de Thales si:

* Dos lados de uno contienen respectivamente a los lados del otro.
* El tercer lado de uno es paralelo al tercer lado del otro".

"Dos triángulos en la posición de Thales son semejantes".

Arco capaz: "Se define el arco capaz de un segmento AB de ángulo α, como el lugar geométrico de los puntos del plano desde los cuales "vemos" el segmento AB bajo el ángulo α ".

Puntos Cocíclicos:

1.- Concepto: "Una serie de puntos diremos que son cocíclicos si pertenecen a la misma circunferencia".

2.- Propiedades:

a) Dos puntos siempre son cocíclicos.
b) Tres puntos siempre son cocíclicos.
c) Si A, B, C y D son cocíclicos, se cumple: $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$.

Potencia de un punto respecto a una circunferencia:

1.- **Propiedad:** "Sean M y N los puntos de corte de una recta que pasa por el punto P con una circunferencia C. El producto de distancias: PM.PN es independiente de la recta que pasa por P".

2.- **Definición:** "Se define la potencia de un punto P respecto a una circunferencia C, como $d^2 - R^2$ donde d es la distancia de P al centro de la circunferencia y R es el radio".

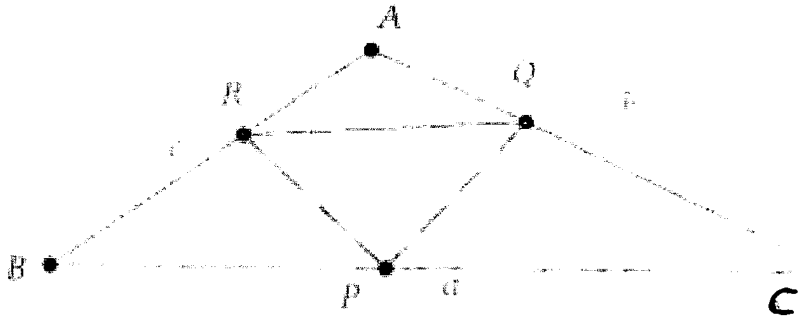
3.- **Posición de un punto respecto a una circunferencia:**

$$Pot_C(P)\begin{cases} > 0 \rightarrow P \text{ es exterior a C} \\ = 0 \rightarrow P \text{ pertenece a C} \\ < 0 \rightarrow P \text{ es interior a C} \end{cases}$$

Problema 1

Sean A, B y C los vértices de un triángulo y P, Q y R los respectivos pies de las bisectrices trazadas desde esos mismos vértices. Sabiendo que PQR es un triángulo rectángulo en P se pide probar:

- *Que ABC ha de ser obtusángulo*[1].
- *Que en el cuadrilátero $ARPQ$, pese a no ser cíclico, la suma de sus ángulos opuestos es constante.*



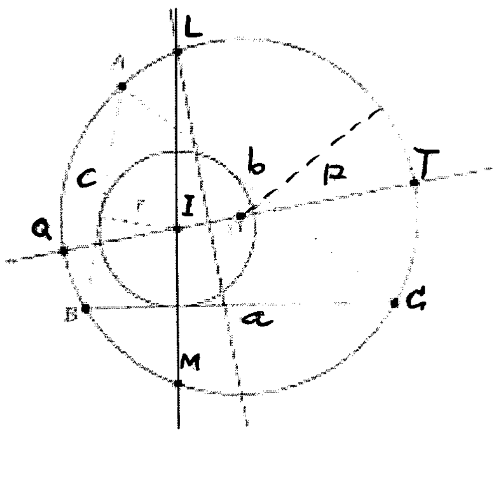
Problema 2

En un triángulo llamaremos

- *O al circuncentro*
- *I al incentro*
- *r al radio de la circunferencia inscrita*

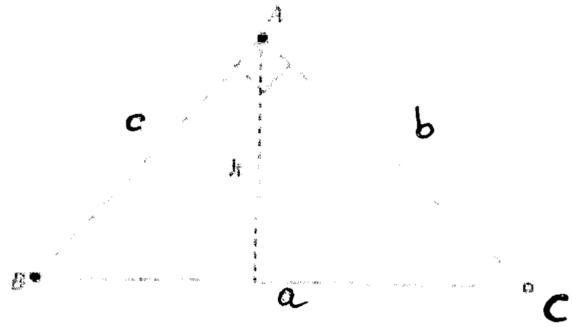
Si la mediatriz [illegible] del segmento OI corta a la circunferencia circunscrita [illegible] en L y LI vuelve a cortar en M, demuestra que:

$$IM = 2r.$$



Problema 3

Determina los lados del triángulo rectángulo del que se conocen el perímetro $P = 96$ y la altura sobre la hipotenusa $h = \frac{96}{5}$.



Problema 4

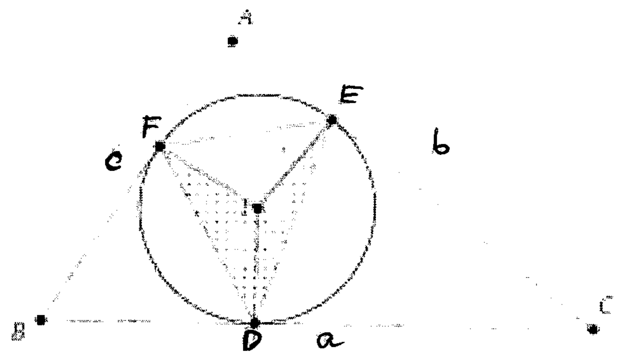
En el triángulo ABC, *el área* S *y el ángulo* $\widehat{C}$ *son conocidos. Halla el valor de los lados* a *y* b *para que el lado* c *sea lo más corto posible.*

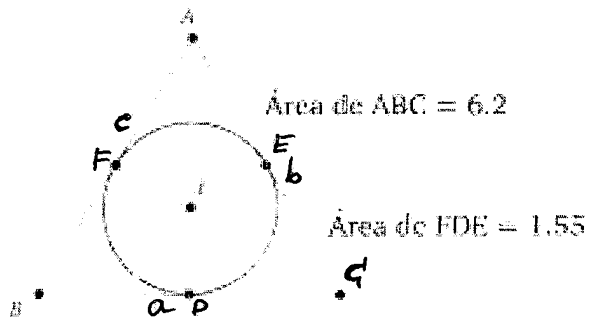
Problema 5

Sean D, E y F los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita al triángulo ABC con los lados BC, AC y AB respectivamente. Demuestra que:

$$4S_{DEF} \leq S_{ABC},$$

donde S_{XYZ} denota el área del triángulo XYZ.





Problema 6

Considera el triángulo ABC, de lados a=BC, b=AC y c=AB. Considera los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita en ABC con el triángulo.
Demostrar que la distancia de dicho punto de tangencia a uno de los vértices de lado tangente es igual al semiperímetro menos la longitud del lado opuesto al vértice.

Problema 7

Considera el triángulo ABC, de lados a=BC, b=AC y c=AB y la circunferencia exinscrita correspondiente al vértice B. Sea P el punto de tangencia de dicha circunferencia con la prolongación del lado BC.

a) Demostrar que la distancia de B a P es igual al semiperímetro del triángulo.

b) A partir del resultado anterior, demostrar que: CQ=p-a y AQ=p-c, donde Q es el punto de tangencia de la circunferencia anterior con el lado AC.

Problema 8

Hallar el lugar geométrico del punto medio de un segmento de longitud a que se apoya continuamente en los ejes.

RELACIÓN DE PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Sean:

* ABC un triángulo acutángulo con $\widehat{A} = 45^0$
* P el pie de la altura por B

Trazamos la circunferencia de centro P que pasa por C y que vuelve a cortar a AC en el punto X y a la altura PB en el punto Y.

Sean r y s las rectas perpendiculares a la recta AY por P y X respectivamente y L y K las intersecciones de r y s con AB.

Demostrar que L es el punto medio del segmento KB.

2.- Demostrar que un triángulo, la distancia de un vértice cualquiera al ortocentro es el doble de la distancia del circuncentro al lado opuesto a ese vértice.

3.- Usando regla y compás construir el triángulo ABC conocidas:

* h_a: altura del triángulo correspondiente al lado BC.
* h_b: altura del triángulo correspondiente al lado AC.
* m_c: mediana del triángulo que parte del vértice C.

4.- Sea ABC un triángulo con $\widehat{B} = 2\widehat{C}$ y $\widehat{A} > 90^0$. Sean:

* D: punto de la recta AB tal que: CD y AC son perpendiculares.
* M: punto medio del lado BC.

Demostrar que: $\widehat{AMB} = \widehat{DMC}$.

5.-Sea O el circuncentro de un triángulo ABC. La bisectriz que parte de A corta al lado opuesto en P. Demostrar que se cumple: $AP^2 + OA^2 - OP^2 = bc$.

6.- Sea ABC un triángulo isósceles con AB=AC y P un punto cualquiera de la circunferencia tangente a los lados AB en B y AC en C.

Sean a,b,c las distancias desde P a los lados BC, AC y AB respectivamente. Demostrar que: $a^2 = bc$.

7.- En un triángulo de lados a,b y c donde el lado a es la media aritmética de b y c. Demostrar que:

* $0^0 \leq \widehat{A} \leq 60^0$.
* La altura relativa al lado a es tres veces el inradio r.
* La distancia del circuncentro al lado a es R-r (donde R es el radio de la circunferencia circunscrita).

8.- Las alturas del triángulo ABC se cortan en el punto H. Se sabe que AB=CH. Determinar el valor del ángulo: $\widehat{BCA}$.

9.-Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que, en el triángulo ABC, la mediana desde B sea dividida en tres partes iguales por la circunferencia inscrita en el triángulo es:

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{10} = \frac{c}{13}$$

10.-Sean:

* ABC un triángulo acutángulo.
* I el centro de la circunferencia inscrita.
* r el radio de la circunferencia inscrita.
* R el radio de la circunferencia circunscrita.

Se traza la altura $AD = h_a$ con D perteneciente al lado BC.

Demostrar que: $DI^2 = (2R - h_a).(h_a - 2r)$.