OLIMPIADA MATEMÁTICA

Clases de Preparación – Sesión del Sábado, 13 de Diciembre de 2014

David Crespo – José María Lirola

1.- Dado un triángulo *ABC*, con baricentro *G*.

a) Prueba que para cualquier punto del plano *M* se verifica:

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 \geq \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2$$, obteniéndose la igualdad si y solamente si $M = G$

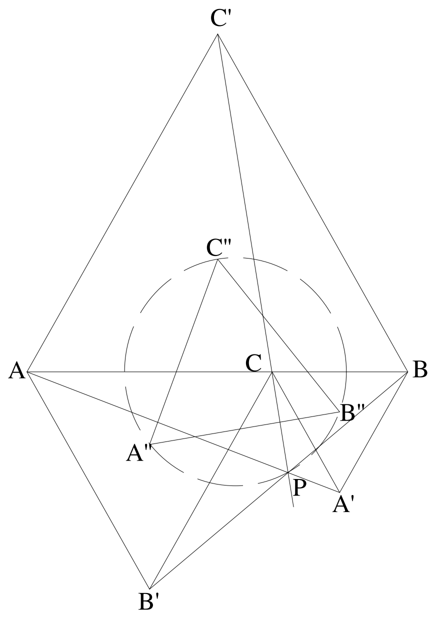
b) Fijado un número $k > \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2$, halla el lugar geométrico de los puntos *M* tales que

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = k$$

2.- Sea OXYZ un triedro trirectángulo de vértice O y aristas X, Y, Z. Sobre la arista Z se toma un punto fijo C, tal que OC = c. Sobre X e Y se toman respectivamente dos puntos variables P y Q de modo que la suma OP + OQ sea una constante dada k. Para cada par de puntos P y Q, los cuatro puntos O, C, P, Q están en una esfera, cuyo centro W se proyecta sobre el plano OXY. Razonar cuál es el lugar geométrico de esa proyección. Razonar también cuál es el lugar geométrico de W.

3.- Sea *ABC* un triángulo acutángulo con $\hat{A} = 45º$, y sea *P* el pie de la altura por *B*.
Trazamos la circunferencia de centro *P* que pasa por *C* y que vuelve a cortar a *AC* en el punto *X* y a la altura *PB* en el punto *Y*. Sean *r* y *s* las rectas perpendiculares a la recta *AY* por *P* y *X*, respectivamente, y *L*, *K* las intersecciones de *r*, *s* con *AB*. Demostrar que *L* es el punto medio de *KB*.

4.- Deslizamos un cuadrado de 10 cm de lado por el plano OXY de forma que los vértices de uno de sus lados estén siempre en contacto con los ejes de coordenadas, uno con el eje OX y otro con el eje OY . Determina el lugar geométrico que en ese movimiento describen:
1. El punto medio del lado de contacto con los ejes.
2. El centro del cuadrado.
3. Los vértices del lado de contacto y del opuesto en el primer cuadrante.



5.- En la figura, AB es un segmento fijo y C un punto variable dentro de él. Se construyen triángulos equiláteros de lados AC y CB, ACB' y CBA' en el mismo semiplano definido por AB, y otro de lado AB, ABC' en el semiplano opuesto. Demuestra:
a) Las rectas AA', BB' y CC' son concurrentes.
b) Si llamamos P al punto común a las tres rectas del apartado a), hallar el lugar geométrico de P cuando C varía en el segmento AB.
c) Los centros A'', B'' y C'' de los tres triángulos forman un triángulo equilátero.
d) Los puntos A'', B'', C'' y P están sobre una circunferencia.

6.- Se consideran las parábolas $y = x^2 + px + q$ que cortan a los ejes de coordenadas en tres puntos distintos por los que se traza una circunferencia. Demostrar que todas las circunferencias trazadas al variar p y q en **R** pasan por un punto fijo que se determinará.

7.- En un triángulo *ABC*, *A'* es el pie de la altura relativa al vértice *A* y *H* el ortocentro.

a) Dado un número real positivo k tal que $\frac{AA'}{HA'} = k$, encontrar la relación entre los ángulos *B* y *C* en función de k.

b) Si *B* y *C* son fijos, hallar el lugar geométrico del vértice *A* para cada valor de *k*.

8.- Dada una circunferencia y en ella dos puntos fijos *A*, *B*, otro variable *P* y una recta *r*; se trazan las rectas *PA* y *PB* que cortan a *r* en *C* y *D* respectivamente. Determina dos puntos fijos de *r*, *M* y *N,* tales que el producto *CM·DN* sea constante al variar *P*.

9.- Sea ABC un triángulo acutángulo, ω su circunferencia inscrita de centro I, Ω su circunferencia circunsccrita de centro O, y M el punto medio de la altura AH, donde h pertenece al lado BC. La circunferencia ω es tangente a este lado BC en el punto D. La recta MD corta a ω en un segundo punto P, y la perpendicular desde I a MD corta a BC en N. Las rectas NR y NS son tangentes a la circunferencia Ω en R y S respectivamente. Probar que los puntos R, P, D y S están en una misma circunferencia.

Demostrar que la longitud de los catetos de un triangulo rectángulo isósceles es siempre igual a la suma de los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita.