En lo sucesivo, usaremos la notación siguiente para referirnos a los elementos de un triángulo:

- A, B y C, los vértices.
- $\hat{A}, \widehat{B}, \hat{C}$ los ángulos correspondientes.
- $a, b \; y \; c$ los lados opuestos a los ángulos
- $p = \frac{a+b+c}{2}$ es el semiperímetro.
- b y h, la base y la altura sobre dicha base, respectivamente.

Puntos notables del triángulo

Nombre	Corte de	Notación	Circunferencia	Radio
Baricentro	Medianas	G		
Ortocentro	Alturas	O		
Incentro	Bisectrices	I	Inscrita	Inradio (r)
Circuncentro	Mediatrices	C	Circunscrita	Circunradio (R)

- Las medianas dividen al triángulo en dos triángulos de igual área.
- La distancia de G a un vértice es el doble que a la mitad del lado opuesto.
- En un vértice, las bisectrices de los ángulos interiores y exteriores son perpendiculares.
- En todo triángulo O, G y C están alineados, denominándose recta de Euler la que los contiene.

Área del triángulo

- En función de la base y la altura $S = \frac{b \cdot h}{2}$
- En función de dos lados y el ángulo comprendido $S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot sen \; \hat{C}$
- En función de los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita

  $S = r \cdot p$ $\qquad$ $S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$
- En función de los lados (Fórmula de Herón)

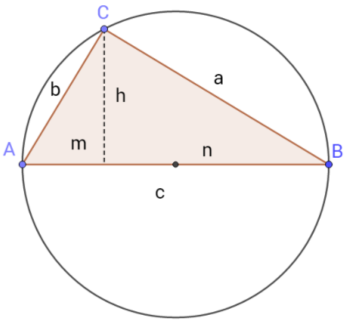
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Ángulos en la circunferencia

- El ángulo **central** corresponde con el arco que encierra.
- El ángulo **inscrito**, es la mitad del central correspondiente.
- El ángulo **interior**, es la semisuma de los arcos que forman él y las prolongaciones de sus lados.
- El ángulo exterior, es la semidiferencia de los arcos que originan sus lados.

Resultados sobre triángulos rectángulos

- Si AB es un diámetro de la circunferencia, entonces ABC es rectángulo en C.



- El punto medio de la hipotenusa es el centro de la circunferencia circunscrita y $R = \frac{c}{2}$.
- La longitud de la mediana trazada sobre la hipotenusa es la mitad de esta.
- El ortocentro O es C.

Teorema de Pitágoras	**Teorema de la altura**	**Teorema del cateto**	
$c^2 = a^2 + b^2$	$h^2 = m \cdot n$	$a^2 = n \cdot c$	$b^2 = m \cdot c$

Fórmulas trigonométricas

$$sen(\alpha \pm \beta) = sen\ \alpha \cdot cos\beta \pm cos\ \alpha \cdot sen\ \beta$$

$$cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta \mp sen\ \alpha \cdot sen\ \beta$$

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\ \alpha \pm tg\ \beta}{1 \mp tg\ \alpha \cdot tg\ \beta}$$

$cos(2\alpha) = cos^2\alpha - sen^2\alpha$ $\quad sen(2\alpha) = 2sen(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$ $\quad tg(2\alpha) = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\alpha}{2}} \qquad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + cos\alpha}{2}} \qquad tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\alpha}{1 + cos\alpha}}$$

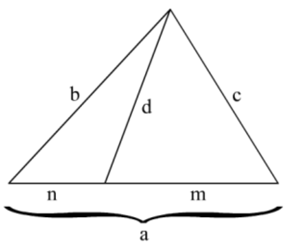
Resultados válidos en cualquier triángulo:

Teorema del coseno	**Teorema del seno**
$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\hat{C})$	$\frac{a}{sen(\hat{A})} = \frac{b}{sen(\hat{B})} = \frac{c}{sen(\hat{C})} = 2R$

Teorema de la bisectriz: Si AD es la bisectriz interna del ángulo $\hat{A}$, entonces

$$\boxed{\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}}$$

Teorema de Stewart: Para cualquier ceviana de longitud d trazada sobre al lado BC, se cumple

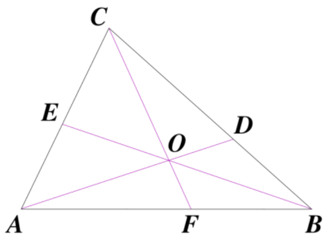


$$\boxed{d^2 \cdot a = b^2 \cdot m + c^2 \cdot n - m \cdot n \cdot a}$$

Teorema de Apolonio (o de la mediana): Es un caso particular del de Stewart, cuando consideramos la mediana sobre el lado a, que notamos M_A.

$$\boxed{b^2 + c^2 = 2{M_A}^2 + \frac{a^2}{2}}$$

Teorema de Ceva: Consideremos un triángulo ABC y sean D, E y F puntos situados sobre los lados BC, CA y AB (respectivamente). Entonces las cevianas AD, BE y CF son concurrentes si y sólo si



$$\boxed{\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1}$$

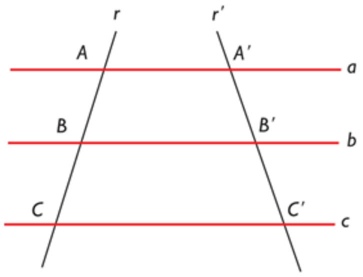
Teorema de Euler: Si $d = d(C, I)$, entonces $\boxed{d^2 = R^2 - 2R \cdot r}$

Desigualdad de Euler: $\boxed{R \geq 2r}$

Desigualdad triangular: todo lado de un triángulo es mayor que la diferencia de los otros, pero menor que su suma $\boxed{a - b < c < a + b}$

Figuras semejantes y proporcionalidad

Teorema de Tales: Si un sistema de rectas paralelas son cortadas por dos secantes, los segmentos determinados en una de ellas, son proporcionales a los correspondientes en la otra.



$$\boxed{\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'B'}}$$

Igualdad de triángulos

Dos triángulos son iguales, si tienen los mismos lados y los mismos ángulos. Para no comprobar todas las condiciones, podemos usar los:

Criterios de igualdad: Dos triángulos serán iguales si

a) Tienen iguales un lado y sus ángulos adyacentes.
b) Tienen iguales dos lados y el ángulo comprendido.
c) Tienen iguales los tres lados

Polígonos semejantes

Dos polígonos son semejantes si sus lados son proporcionales y los ángulos correspondientes, iguales a la razón común de los lados se le llama razón de semejanza y la denotaremos por k.

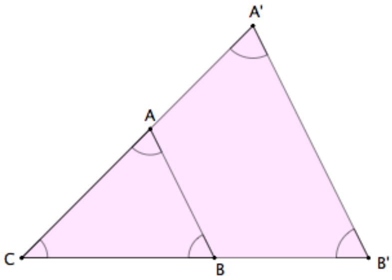
Proposición: Si dos polígonos S y S' son semejantes, denotando por P y P' a sus perímetros y A y A' a sus áreas, respectivamente entonces:

$$\frac{P}{P'} = k \qquad\qquad \frac{A}{A'} = k^2$$

En el caso de los triángulos, para mostrar que dos de ellos son semejantes, basta con aplicar cualquiera de los siguientes criterios:

a) Tienen dos ángulos iguales.
b) Comparten un ángulo y los lados que lo forman son proporcionales.
c) Tienen los lados proporcionales.

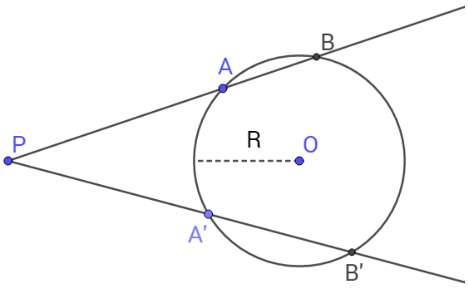
Teorema (triángulos en posición de Tales): Si dos triángulos son tales que dos lados de uno contienen a los del otro y el tercer lado es paralelo, los triángulos son semejantes.



En la figura adjunta, AB es paralelo a A'B', y por lo tanto los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes.

Potencia de un punto respecto a una circunferencia

Si desde un punto P, se traza una recta que interseca a una circunferencia C de radio R y centro O, en otros dos puntos, el producto de las distancias de P a los puntos de corte, no depende de la recta escogida. Esto es PA·PB=PA'·PB'.



Dicho producto inalterable se llama potencia del punto P respecto de la circunferencia C y lo notaremos $Pot_C(P)$. Si d=d(P, O), entonces:

$$\boxed{Pot_C(P) = d^2 - R^2}$$

Número áureo

Es la solución positiva de la ecuación $\phi^2 - \phi - 1 = 0 \Rightarrow \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

- La razón entre la diagonal de un pentágono y su lado, es ϕ.
- $2\phi = \cos 36°$