Quinta Sesión de Preparación de las Olimpiadas de la RSME en la Universidad de Almería.

14/02/15

Contenidos de la sesión:

Ⓐ Desigualdades numéricas.

a) Potencias pares del binomio, $(x \pm y)^2$.

b) Comparación entre las medias clásicas:

armónica $\leq$ geométrica $\leq$ aritmética $\leq$ cuadrática.
MH MG MA MC

c) Aplicación de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

(Véanse ejercicios 1 a 10.)

Ⓑ Ecuaciones funcionales:

a) Algunas técnicas estándar.

b) Algunos casos concretos.

(Véanse ejercicios 11 a 14.)

(SON 16 PÁGINAS)

(1) $x, y \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0 : a+b=1$

$$\Rightarrow \quad (ax+by)^2 \leq ax^2+by^2.$$

<u>Resolución</u>: Dado que los parámetros a y b aparecen en ambos miembros, parece que la solución no ha de pasar por expresar uno en función del otro, para hacerlo "desaparecer", sino, más bien, para "rebajar" en uno el grado con el que se presentan:

$$\begin{aligned}
(ax+by)^2 &= (ax)^2 + 2axby + (by)^2 \\
&= a(1-b)x^2 + 2abxy + b(1-a)y^2 \\
&= ax^2 - abx^2 + 2abxy + by^2 - aby^2 \\
&= ax^2 + by^2 - ab\left[x^2 - 2xy + y^2\right] \\
&= ax^2 + by^2 - ab\,(x-y)^2 \leq ax^2 + by^2
\end{aligned}$$

donde vemos que la igualdad se obtendrá si y sólo si $x=y$. (Además, también se alcanza la igualdad en el caso trivial en el que $ab=0 \Leftrightarrow$ $a=0$ ó $b=0 \Leftrightarrow$ b ó a será 1: nada que demostrar.)

(2) $a, b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca.$

Resolución: El desarrollo de los binomios es el caldo apropiado donde relacionar cuadrados con productos cruzados:

$$0 \leq (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 =$$

$$= a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2 =$$

$$= 2\left[a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\right] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca.$$

(3) $a, b, c \in \mathbb{R} \mid a^2+b^2+c^2 = 1 \Rightarrow$ ¿$a+b+c$?

Resolución: Investigamos:

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2 + 2(ab+bc+ca) \leq$$

(por el ejercicio anterior y la hipótesis)

$$\leq 1 + 2\cdot 1 = 3,$$

de donde $(a+b+c)^2 \leq 3 \Rightarrow |a+b+c| \leq \sqrt{3}$

$$\Longleftrightarrow \quad -\sqrt{3} \leq a+b+c \leq \sqrt{3}.$$

y ocurre que puede alcanzar ambos extremos:

$$a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3} \quad y \quad a=b=c=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

④ $a, b, c \in \mathbb{R} \mid a+b+c=2,\ ab+bc+ca=-1,\ abc=2$

$\Longrightarrow$ ¿ $a^k+b^k+c^k=?$, $k=2, 3$ y 4

Resolución

$\underline{k=2}$ $\quad (a+b+c)^2 = 4 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$= a^2+b^2+c^2-2$

$\Longrightarrow \quad a^2+b^2+c^2 = 6$

$\underline{k=3}$ $\quad (a+b+c)^3 = 8 = a^3+b^3+c^3+6abc$

$+3\left[a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\right]$

$= a^3+b^3+c^3+12+$

$+3\left[a(ab+ac)+b(bc+ba)+c(ca+cb)\right]$

$= a^3+b^3+c^3+12+$

$+3\left[a(-1-bc)+b(-1-ac)+c(-1-ab)\right]$

$= a^3+b^3+c^3+12-9abc-3(a+b+c)$

$= a^3+b^3+c^3+12-18-6 \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad a^3+b^3+c^3 = 20$

$\underline{k=4}$ $\quad (a+b+c)^4 = 16 = \left[(a+b+c)^2\right]^2 = (a^2+b^2+c^2-2)^2 =$

$= a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-$

$-4(a^2+b^2+c^2)+4$

donde $(ab+bc+ca-2)^2 = (-3)^2 = (ab)^2+(bc)^2+(ca)^2+12$

$\Longrightarrow a^4+b^4+c^4 = 16-2\left[9-12\right]+4\cdot 6-4 = 16+6+24-4$

$\Longrightarrow \quad a^4+b^4+c^4 = 42$

(5) $x, y > 0 \Rightarrow \dfrac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2} \leq \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$

O sea: $MH \leq MG \leq MA \leq MC$

Resolución: Para probar la relación entre las medias geométrica y aritmética, "tirando hacia atrás":

$$0 < \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \Longleftrightarrow xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{x^2+2xy+y^2}{4} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 4xy \leq x^2+2xy+y^2 \Longleftrightarrow 0 \leq (x-y)^2$$

y sabemos que esto es siempre cierto. Además, nos indica que la igualdad se alcanzará sólo en el caso de que sea $x=y$.

La relación entre las medias armónica y geométrica se deduce de la anterior relación sin más que hacer

$$a = 1/x \quad y \quad b = 1/y \Rightarrow$$

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \frac{2}{a+b} \leq \sqrt{\frac{1}{a}\frac{1}{b}} = \sqrt{xy} \Longleftrightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

que no es otra cosa que la relación probada antes para cualesquiera reales positivos.

Resta ver que la aritmética es menor que la cuadrática: basta elevar al cuadrado en ambos miembros y es inmediato.

⑥ Probaremos que $\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\dots\cdot x_n} \leq \dfrac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} \equiv P(n)$,

para cualquier familia finita de reales positivos mediante un original argumento que se atribuye a Cauchy.

Para ver que la fórmula es válida para todo natural n, probaremos que:

a) Es cierto para $n=2$ (lo cual acaba de comprobarse: Ej. n° 5).

b) Si se prueba cierto para $n \in \mathbb{N}$, ~~$n\geq 2$~~, ha de probarse para $n-1$.

c) Si se prueba para $n \in \mathbb{N}, n>2$, ha de comprobarse también cierto para $2n$.

Queda claro que si se da todo lo anterior $P(n)$ será cierto siempre.

b) $x_n := \sqrt[n-1]{x_1 x_2 \cdot\dots\cdot x_{n-1}} \Longrightarrow$ por ser cierto $P(n)$:

$$\frac{x_1+x_2+\dots+x_{n-1}+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{\underbrace{x_1 x_2 \cdot\dots\cdot x_{n-1}}_{= x_n^{n-1}}\, x_n} = \sqrt[n]{x_n^n} = x_n$$

$$\Longrightarrow x_1+x_2+\dots+x_{n-1}+x_n \geq n x_n \Rightarrow x_1+x_2+\dots+x_{n-1} \geq (n-1)x_n$$

$$\Longrightarrow \frac{x_1+x_2+\dots+x_{n-1}}{n-1} \geq x_n = \sqrt[n-1]{x_1x_2\cdots x_{n-1}}\,.$$

c) $x_1+x_2+\dots+x_n+\dots+x_{2n-1}+x_{2n} =$

$$= (x_1+x_2)+(x_3+x_4)+\dots+(x_{2n-1}+x_{2n}) \overset{P(2)\text{ cierto}}{\geq}$$

$$\geq 2\Big(\underbrace{\sqrt{x_1\cdot x_2}}_{\alpha_1} + \underbrace{\sqrt{x_3\cdot x_4}}_{\alpha_2} + \dots + \underbrace{\sqrt{x_{2n-1}\cdot x_{2n}}}_{\alpha_n}\Big) \overset{P(n)\text{ cierto}}{\geq}$$

$$\geq 2n \sqrt[n]{\sqrt{x_1\cdot x_2}\,\sqrt{x_3\cdot x_4}\cdot\dots\cdot\sqrt{x_{2n-1}\, x_{2n}}} =$$

$$= 2n \sqrt[2n]{x_1\cdot x_2\cdot\dots\cdot x_{2n}}$$

⑦ $$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}} \le \sqrt{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}\ , \quad \forall x_1, x_2, \dots, x_n > 0.$$

(La otra desigualdad tendrá que esperar..., sólo un poco.)

Evidente: se obtiene de la misma forma a como se obtuvo para $n=2$. Basta hacer $a_k = \frac{1}{x_k}$, $k=1,\dots,n$ y usar $MG \le MA$, del ejercicio 6.

⑧ Aplicación: $a, b, c > 0 : (1+a)(1+b)(1+c) = 8 \Rightarrow abc \le 1$

Resolución: La condición sobre a, b, c nos dice que
$$1 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + abc = 8$$
Aplicando $MG \le MA$ por un lado: $\sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3}$;
y por otro lado, $MH \le MG$, nos da:
$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \le \sqrt[3]{abc} \iff \frac{3}{ab+bc+ca} \le (abc)^{\frac{1}{3}-1}$$
$$\iff 3(abc)^{2/3} \le ab+bc+ca.$$
Por tanto:
$$8 \ge 1 + 3(abc)^{1/3} + 3(abc)^{2/3} + abc$$
$$= \left(1+(abc)^{1/3}\right)^2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 2 \ge 1 + (abc)^{1/3} \iff (abc)^{1/3} \le 1$$
$$\iff \underline{\underline{abc \le 1}}.$$

(8') También como aplicación se pueden obtener las siguientes relaciones: Para $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, se tienen:

a) $x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n \geq n\, x_1 x_2 \cdots x_n$

b) $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_3} + \dots + \dfrac{x_n}{x_1} \geq 1$

Resolución:

a) Llamemos $a_k := x_k^n$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Así, la desigualdad $MG \leq MA$ nos dice que para la familia $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, se da $\dfrac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$.

Sustituyendo nuevamente se obtiene lo deseado.

b) Llamando $a_1 = \dfrac{x_1}{x_2}$, $a_2 = \dfrac{x_2}{x_3}$, ..., $a_n = \dfrac{x_n}{x_1}$ $\Rightarrow$ otra vez la relación $MG \leq MA$, ahora para esta familia $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ nos da:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = n \sqrt[n]{1} = n \geq 1.$$

9 Desigualdad de Cauchy-Schwarz

(Esta desigualdad, tal y como la ~~presentamos~~ ~~estamos~~ presentamos aquí, se debe que ya trabajaban con ella Lagrange y Cauchy.)

$a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n > 0 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$$

alcanzándose la igualdad si y sólo si

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \text{constante}.$$

(Además, también se alcanza la igualdad en el caso trivial en el que todos los a_k's, o bien los b_k's, son ceros.)

<u>Resolución</u> La demostración de esta desigualdad requiere de cierta elegancia a la hora de afrontar una solución a un problema "serio": tiene una carga de "idea genial" que justifica que sea "bautizada" con el nombre de quien se le debe. <u>Idea</u>: construiremos un polinomio de 2º grado cuyo discriminante involucrará, como coeficientes del polinomio, a los sumatorios implicados.

(Afortunadamente, vosotros -además de no tener que volver a probarla nuevamente- ¡os bastaréis con saber aplicarla!

Sea $p(x) := \sum_{k=1}^{n} (a_k x - b_k)^2 =$

$$= (a_1 x - b_1)^2 + (a_2 x - b_2)^2 + \cdots + (a_n x - b_n)^2 .$$

Claramente $p(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$; y será

$$p(x) = 0 \iff \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \cdots = \frac{b_n}{a_n} = x$$

(pues la no negatividad de p conlleva a solución única, caso de existir).

Por tanto, el discriminante del polinomio Δ_p será (recordemos: $ax^2 + bx + c = 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$) negativo o cero:

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k x - b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 x^2 - 2 a_k b_k x + b_k^2 \right)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right) x^2 - 2 \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right) x + \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

$$\Longrightarrow \Delta_p = \left(-2 \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 - 4 \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right) \leq 0$$

$$\iff \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right),$$

de donde extrayendo raíces se obtiene lo deseado.

Nota: observa que no es necesario que los coeficientes sean positivos:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| |b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)^{1/2} .$$

(9') Para quienes manejen números complejos, con análoga demostración, se puede probar también este resultado. En este caso, se escribe así:

$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{C} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{n} a_k \overline{b_k}\right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right)$$

alcanzándose la igualdad si y sólo si (además del caso trivial $|b_1|^2+|b_2|^2+\dots+|b_n|^n=0$) existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $a_k = z b_k$ para todo $k=1,2,\dots,n$.

Observa que $\overline{z}$ = conjugado de z = $\operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z$, de modo que $z\overline{z} = |z|^2$.

<u>Resolución</u> $A := \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2$, $B := \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2$, $C := \sum_{n=1}^{n} a_k \overline{b_k}$ (observa que $A, B \in \mathbb{R}^+$; si alguno es cero, trivializa). Para $z \in \mathbb{C}$:

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k - z b_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} (a_k - z b_k)\overline{(a_k - z b_k)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (a_k - z b_k)(\overline{a_k} - \overline{z}\,\overline{b_k}) = A - \overline{z} C - z \overline{C} + |z|^2 B.$$

Tomando $z := C/B \Rightarrow 0 \leq A - \frac{|C|^2}{B} - \frac{|C|^2}{B} + |C|^2 B/B^2$

$\Rightarrow |C|^2 \leq AB.$

(10) MA $\leq$ MC: $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} \Rightarrow \dfrac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \leq \sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}{n}}$

Ha llegado el momento de darle buen uso a la desigualdad de Cauchy-Schwarz: llamemos

$$\alpha_k = a_k \quad \text{y} \quad \beta_k = 1/n \,, \quad \forall\, k = 1, 2, \dots, n.$$

Así, tendremos que, por un lado:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k \doteq \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \equiv: \underline{\underline{MA}}$$

y, por otro lado:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} \cdot \left(n \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} \equiv: MC \,;$$

de donde, usando C-S., llegamos a lo deseado.

(11) Toda función f se puede ver como suma de dos funciones, una de ella par y la otra impar.

Resolución. Las funciones coseno o $x \to x^2$ son ejemplos de funciones pares: $g(-x) = g(x), \forall x \in \mathrm{Dom}\, g$. Por otro lado, el seno o $x \longrightarrow x^3$ son ejemplos de funciones impares: $h(-x) = -h(x), \forall x \in \mathrm{Dom}\, h$.

Pues bien, dada una función f cualquiera, si hacemos:

$$g(x) := \frac{f(x)+f(-x)}{2}, \quad h(x) := \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

tendremos que g y h son, respectivamente, funciones par e impar, y su suma da: $g(x) + h(x) = f(x)$.

(Claramente, además, estas funciones g y h son únicas - salvo constantes multiplicativas.)

(12) Encuentra una expresión general para las funciones aditivas de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$; es decir:

encuentra $\{f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \;/\; f(r+s) = f(r)+f(s), \forall r,s \in \mathbb{Q}\}$

donde $\mathbb{Q}$ es el conjunto de los números racionales.

Resolución:

En primer lugar, comenzaremos "ensayando" algunos valores "sencillos":

$f(0) = f(0+0) = f(0)+f(0) \Rightarrow f(0) = 2f(0) \Rightarrow 1=2$ ¡absurdo!,

(1)

luego $\underline{f(0)=0}$.

Ahora: $f(0) = f(r-r) = f(r)+f(-r), \forall r \in \mathbb{Q} \Rightarrow$

(2)

$\Rightarrow \underline{f(-r) = -f(r), \forall r \in \mathbb{Q}}$.

Más ensayos:

$f(2) = f(1+1) = f(1)+f(1) = 2f(1)$. Esto es un paso, un

(3)

gran paso: si $\underline{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow$

$f(n) = f(1+\overset{n)}{\cdots}+1) = f(1)+\overset{n)}{\cdots}+f(1) = nf(1) \Rightarrow \underline{f(n)=nf(1)}$

(Esta afirmación exige, en rigor, el uso del Principio de Inducción...)

Uniendo lo que sabemos por (1), (2) y (3):

$\underline{f(p) = pf(1), \forall z \in \mathbb{Z}} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$

Para "saltar" de $\mathbb{Z}$, el conjunto de los números enteros, a $\mathbb{Q}$ haremos lo siguiente:

¡otra vez inducción aquí!

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(1) = f(\tfrac{1}{n} + \overset{n)}{\cdots} + \tfrac{1}{n}) = n f(1/n), \forall n \in \mathbb{N}$$

Luego $f(1/n) = 1/n\, f(1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Finalmente, para $r \in \mathbb{Q}$, será $r = \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}$.

Así:

$$f(r) = f(\tfrac{p}{q}) = f(\tfrac{1}{q} + \overset{p)}{\cdots\cdots} + \tfrac{1}{q}) = p f(\tfrac{1}{q}) =$$

$$= \frac{p}{q} f(1) = r f(1), \forall r \in \mathbb{Q}$$

de modo que

$$\boxed{f(x) = x f(1), \forall x \in \mathbb{Q}}$$

es la expresión general de la fórmula buscada: las funciones lineales de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$. ($\mathbb{Q}$-lineales, para más justeza.)

(13) Prueba que no existe ninguna f función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tal que:

$$f(x^2+y) = f(x) + y^2, \quad \forall x,y \in \mathbb{R}.$$

Resolución: Como el objetivo es comprobar su no existencia, vamos a ver qué habría de ocurrir caso de existir. Calculamos $f(x)$ para valores concretos:

$$\left.\begin{array}{ll} x=0,\ y=1 \Rightarrow & f(1) = f(0)+1 \\ x=1,\ y=-1 \Rightarrow & f(0) = f(1)+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{0=2}$$

y de este absurdo se sigue lo deseado.

(14) Calcula una fórmula explícita para la derivada n-ésima de

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}.$$

Resolución. Claramente, la "pega" de esta función es trabajar con ella "tal cual", pues si la descomponemos en fracciones simples:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left\{(1-x)^{-1} + (1+x)^{-1}\right\}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left\{+(1-x)^{-2} - (1+x)^{-2}\right\}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left\{2(1-x)^{-3} + 2(1+x)^{-3}\right\}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{2}\left\{2\cdot 3(1-x)^{-4} - 2\cdot 3(1+x)^{-4}\right\} \quad \ldots$$

$$\ldots \quad f^{n)}(x) = \frac{n!}{2}\left\{(1-x)^{-(n+1)} + (-1)^n (1+x)^{-(n+1)}\right\}, \quad \forall x : |x| \neq 1$$