2017 20 10 Preparación de las olimpiadas matemáticas
Resolución de problemas

- *Encuentra las raíces de la ecuación* $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = 0$.

Método A. Usando variable compleja, recordemos que las soluciones de la ecuación $z^n = r$ son n puntos que se equidistribuyen sobre la circunferencia de centro 0 y radio $\sqrt[n]{r} = r^{1/n}$. Se puede hacer $(1-x)\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4\right) = 1 - x^5$, de modo que las cuatro raíces que se buscan en el problema dado se pueden encontrar entre las cinco que nos proporciona $1 - x^5 = 0$. Es claro que la raíz a eliminar de entre las cinco dadas será la trivial, $x = 1$. Por tanto, y como, $1 - x^5 = 0$ si y sólo si $x \in \{\exp(\mathrm{i}2\pi k/5) : k = 0, 1, 2, 3, 4\}$, se sigue que las cuatro soluciones son

$$x_k = \exp(\mathrm{i}2\pi k/5) : k = 1, 2, 3, 4,$$

o bien,

$$x_k = \cos(2\pi k/5) + \mathrm{i}\sin(2\pi k/5) : k = 1, 2, 3, 4.$$

Método B. Introduciendo un conveniente cambio de variable $u := x + 1/x$, después de dividir todo por x^2, tendemos que:

$$1/x^2 + 1/x + 1 + x + x^2 = 0,$$

o lo que sería, después del cambio:

$$1/x^2 + 1/x + 1 + x + x^2 = \left(x^2 + 2 + 1/x^2\right) - 2 + 1 + (x + 1/x) = u^2 - 2 + 1 + u = u^2 + u - 1 = 0.$$

Por tanto, las dos soluciones $u = \frac{-1\pm\sqrt{1-4(-1)}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ nos proporcionarán las cuatro buscadas al solucionar el cambio $u := x + 1/x$:

$$xu = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 + ux + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-u \pm \sqrt{u^2 - 4}}{2};$$

es decir (escribiendo coherentemente los subíndices para que coincidan con los resultados del Método A),

$$\begin{array}{ll} x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} & x_4 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \\ x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} & x_3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \end{array}$$

(Recuerda que $\overline{z} := \mathrm{Re}\, z - \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\, z$ es el conjugado de z; de modo que $\overline{x}_1 = x_4$ y $\overline{x}_2 = x_3$.)

- *Resuelve la ecuación* $\sqrt[4]{97 - x} + \sqrt[4]{x} = 5$.

Vamos a introducir un cambio de variable... que puede sorprender (a priori), pues aparecerán dos parámetros a y b: $97 - x = a^4$ y $x = b^4$. Ahora resulta ya natural, pues estamos eliminando radicales, y aparece un sistema 2×2:

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a^4 + b^4 = 97 \end{cases}$$

que es el que vamos a resolver. Haciendo cálculos:

$5^4 = (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 = \left(a^4+b^4\right) + 4ab\left(a^2+b^2\right) + 6a^2b^2$

$= \left(a^4+b^4\right) + 4ab\left[(a+b)^2 - 2ab\right] + 6a^2b^2 = 97 + 4ab\,(25-2ab) + 6a^2b^2$

$= -2a^2b^2 + 100ab + 97$, de donde haciendo $t := ab$, tendremos que resolver:

$$t^2 - 50t + 264 = 0,$$

cuyas soluciones son $t = 6$ y $t = 44$, de modo que desecharemos la segunda de las soluciones (¿por qué?) y resolviendo el sistema

$$\begin{cases} a+b=5 \\ ab=6 \end{cases}$$

obtenemos que las soluciones de este sstema son 2 y 3, y por tanto, los posibles valores de x son 16 y 81.

- (Números combinatorios) *El factorial de* 0*, que escribiremos como* $0!$*, es* 1*. El factorial de cualquier positivo* n *se definirá como* $n! := (n-1)! \times n$*. El número combinatorio* $\binom{m}{n}$*, con* $m \geq n$*, se define como el número de subconjuntos de* n *elementos que tiene un conjunto de* m *elementos; o sea* $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$*. Prueba las siguientes relaciones:*

$$\begin{aligned} \binom{m}{0} &= \binom{m}{m} = 1; \binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}; \\ \binom{m}{n-1} + \binom{m}{n} &= \binom{m+1}{n}; \binom{m}{n} = \frac{m}{n}\binom{m-1}{n-1}. \end{aligned}$$

- (Binomio de Newton) *Para cada par de números reales* a *y* b *y cualquier natural* n *se verifican:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

  y

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k;$$

  y deduce que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ y que $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

Una vez probada la primera, las otras tres son evidentes, tomando en vez de la pareja (a, b), respectivamente, las parejas $(a, -b)$, $(1, 1)$ y $(1, -1)$. Observa que que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ es la suma de todos los coeficientes de la fila $(n+1)$-ésima en el triángulo de Pascal. A su vez, este número 2^n, es el número de subconjuntos de k elementos que podemos encontrar dentro de un conjunto de n elementos.

La demostración se seguirá por inducción sobre n: para el caso $n=1$ es trivial. Supondremos cierta la fórmula para n y la probaremos para $n+1$:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \\
&= a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} + b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^k + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]a^{n-k+1}b^k + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n-k+1}b^k + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n-k+1}b^k.
\end{aligned}$$

- Calcula las siguientes tres sumas:

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k;\quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{1+k};\quad \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2.$$

$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k = \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}k = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = n2^{n-1}$

$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{1+k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n+1}{n+1}\frac{1}{1+k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(n+1)\frac{1}{1+k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)$

Derivaremos con respecto de x en la identidad (que se obtiene del binomio de Newton haciendo $a=1$ y $b=x$)

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k,$$

obtenemos $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}$. Si multiplicamos por x y volvemos a derivar:

$$n(1+x)^{n-1} + xn(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2x^{k-1}.$$

Haciendo $x = 1$, se sigue el resultado:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^2 = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = 2^{n-2}[2n + n(n-1)] = n(n+1)2^{n-2}.$$

- *¿Cuánto vale la suma de los n primeros números naturales?*

Este resultado se puede comprobar por inducción sobre n cuando nos es dada la fórmula candidata a verificarse:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Pero es tentador hacerlo según "la forma" en la que lo hizo Gauss, (según cuentan) a la edad de 7 años: dispuso los sumandos bajo cierta simetrización... y sumando columna a columna, el resultado resultó tan trivial como espectacular:

S_n	1	2	3	$\ldots$	$n-1$	n
S_n	n	$n-1$	$n-2$	$\ldots$	2	1
$2S_n$	$n+1$	$n+1$	$n+1$	$\ldots$	$n+1$	$n+1$

de donde $2S_n = n(n+1)$ nos lleva al resultado.

- *Comprueba que para cualquier natural n se tiene que $n^3 - n = \dot{6}$; es decir, el número $n^3 - n$ es siempre múltiplo de 6.*

Como es una fórmula que involucra a los números naturales, la demostración la realizaremos por inducción sobre n: para $n = 1$ la fórmula es trivialmente válida, pues $1^3 - 1 = 0 = 0 \times 6$. Suponiendo cierta la fórmula para cierto n, hagamos los siguientes cálculos:
$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = n^3 + 3n^2 + 2n$
$= n^3 + (-n + n) + 3n^2 + 2n = (n^3 - n) + 3n^2 + 2n = \dot{6} + 3n(n+1)$, de donde se concluye la prueba, pues de entre cada dos números naturales consecutivos, uno siempre será par.

- *¿Para qué valores de n se satisface la desigualdad $n! - 3^n > 0$?*

Llamemos $\mathrm{P}(n)$. Analizando casos, observamos que:
$n = 1 \Rightarrow 1! - 3^1 = -2 < 0 \Rightarrow \mathrm{P}(1)$ es falso;
$n = 2 \Rightarrow 2! - 3^2 = -7 < 0 \Rightarrow \mathrm{P}(2)$ es falso;
$n = 3 \Rightarrow 3! - 3^3 = -21 < 0 \Rightarrow \mathrm{P}(3)$ es falso;
...
$n = 6 \Rightarrow 6! - 3^6 = -9 < 0 \Rightarrow \mathrm{P}(6)$ es falso;
$n = 7 \Rightarrow 7! - 3^7 = 2853 < 0 \Rightarrow \mathrm{P}(7)$ es cierto; luego intentamos comprobar que

$$\text{con } n \geq 7, \text{ si } \mathrm{P}(n) \text{ es cierto } \Longrightarrow \mathrm{P}(n+1) \text{ es cierto.}$$

En efecto: $(n+1)! - 3^{n+1} = n!(n+1) - 3^n 3 >$ (aplicando la hipótesis de inducción)$>$ $3^n(n+1) - 3^n 3 = 3^n(n+1-3) = 3^n(n-2) > 0$, para todo natural mayor o igual a 3; por lo tanto, se verificará para todo $n \geq 7$.

- *Calcula la suma infinita* $1+1/2+1/3+1/4+\cdots+1/n+\cdots$

Método A. Llamaremos $S=1+1/2+1/3+1/4+\cdots+1/n+\cdots$ a la suma. Por tanto,

$S=(1/2+1/2)+1/2+1/3+1/4+\cdots+1/n+\cdots=1/2+(1/2+1/2)+1/3+1/4+\cdots+1/n+\cdots$

$>1/2+(1/2+1/2)+1/4+1/4+1/6+1/6+\cdots+1/2n+1/2n+\cdots=1/2+S$, de modo que

$$S>1/2+S,$$

pero es claro que no puede ser esto cierto para ningún número, a menos que $S=+\infty$.

Método B. Observa que

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\overset{n)}{\cdots}+\frac{1}{2n}=1/2.$$

Por tanto, agrupando convenientemente, tenemos:

$$\begin{aligned}
& 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+2}}\\
> \; & 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\overset{8}{\cdots}+\frac{1}{16}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n+2}}+\overset{2^{n+1}}{\cdots}+\frac{1}{2^{n+2}}\right)\\
= \; & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\overset{n+2}{\cdots}+\frac{1}{2}=1+\frac{n+2}{2}\to+\infty \text{ si } n\to+\infty,
\end{aligned}$$

de modo que la suma propuesta es mayor que cualquier número real. Por tanto

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=+\infty.$$

- *Prueba la relación entre las medias armónica (MH), geométrica (MG), aritmética (MA) y cuadrática (MC) de dos números x e y:*

$$\begin{aligned}
&\mathrm{MH}\,(x,y)=\tfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}};\quad \mathrm{MA}\,(x,y)=\tfrac{x+y}{2};\\
&\mathrm{MG}\,(x,y)=\sqrt{xy};\quad \mathrm{MC}\,(x,y)=\sqrt{\tfrac{x^2+y^2}{2}}.
\end{aligned}$$

Se probará que:

$$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\le\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}\le\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Y se hará "razonando hacia atrás", empezando por la primera desigualdad:

$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\le\sqrt{xy}\iff\frac{2xy}{x+y}\le\sqrt{xy}\iff\left(\frac{2xy}{x+y}\right)^2\le xy\iff 4xy\le(x+y)^2\iff 0\le(x-y)^2$, luego

$$\mathrm{MH}\,(x,y)\le\mathrm{MG}\,(x,y)\,.$$

Para la segunda desigualdad:
$\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2} \iff xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \iff 4xy \le (x+y)^2 \iff 0 \le (x-y)^2$, luego

$$\mathrm{MG}(x,y) \le \mathrm{MA}(x,y).$$

Finalmente, la tercera y última:
$\frac{x+y}{2} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \iff \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \le \frac{x^2+y^2}{2} \iff \frac{x^2+2xy+y^2}{4} \le \frac{x^2+y^2}{2}$
$\iff x^2+2xy+y^2 \le 2\left(x^2+y^2\right) \iff 0 \le (x-y)^2$, luego

$$\mathrm{MA}(x,y) \le \mathrm{MC}(x,y).$$

- (Desigualdad de Cauchy-Schwarz-Bunyakowski) *Para $2N$ números reales positivos $a_1, a_2, \ldots, a_N, b_1, b_2, \ldots, b_N$, se tiene*

$$\sum_{k=1}^{N} a_k b_k \le \sqrt{\sum_{k=1}^{N} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{N} b_k^2},$$

y se alcanza la igualdad si y sólo si $\frac{a_1}{b_1} = \cdots = \frac{a_N}{b_N}$. (Obsérvese que no se precisa que todos los números sean positivos, pues

$$\sum_{k=1}^{N} a_k b_k \le \sum_{k=1}^{N} |a_k|\,|b_k| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{N} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{N} b_k^2},$$

en cuyo caso la igualdad se alcanza en el caso señalado arriba o bien cuando todos los coeficientes son nulos.)

Consideremos el polinomio siguiente:

$$p(x) := \sum_{k=1}^{N} (a_k - b_k x)^2, \forall x \in \mathbb{R},$$

es decir, para cada $x \in \mathbb{R}$:
$p(x) = \sum_{k=1}^{N} \left(a_k^2 - 2a_k b_k x + b_k^2 x^2\right) = \left(\sum_{k=1}^{N} b_k^2\right) x^2 - 2\left(\sum_{k=1}^{N} a_k b_k\right) x + \sum_{k=1}^{N} a_k^2$.

Como p no puede tomar valores negativos, su discriminante Δ será negativo (y será nulo si y sólo si $p(x) = 0$, con una única raíz $x = \frac{a_1}{b_1} = \cdots = \frac{a_N}{b_N}$):
$0 \ge \left(-2\sum_{k=1}^{N} a_k b_k\right)^2 - 4\left(\sum_{k=1}^{N} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{N} b_k^2\right)$
$\implies \left(\sum_{k=1}^{N} a_k b_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{N} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{N} b_k^2\right)$, que es lo deseado.

- (Aplicaciones de la desigualdad de Cauchy-Schwarz-Bunyakowski) *Prueba que dados $a_1, \ldots, a_N$ reales arbitrarios, se verifica que su media aritmética no supera a la media cuadrática; es decir:*

$$\frac{a_1 + \cdots + a_N}{N} \le \frac{|a_1 + \cdots + a_N|}{N} \le \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_N^2}{N}}.$$

(Obviamente sólo probaremos la segunda desigualdad; la primera es una trivialidad.) Basta con hacer $b_1 = \cdots = b_N = 1$, de donde $\left(\sum_{k=1}^N a_k\right)^2 \leq N\left(\sum_{k=1}^N a_k^2\right) = N^2\left(\frac{\sum_{k=1}^N a_k^2}{N}\right)$, lo que equivale a

$$\left|\frac{\sum_{k=1}^N a_k}{N}\right|^2 \leq \frac{\sum_{k=1}^N a_k^2}{N}.$$

- (Aplicaciones de la desigualdad de Cauchy-Schwarz-Bunyakowski) *Prueba que dados $a_1, \ldots, a_N$ reales positivos, se verifica que su media geométrica no supera a la media aritmética, y la armónica no supera a ninguna de las dos anteriores; es decir:*

$$\frac{N}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_N}} \leq \sqrt[N]{a_1 \times \cdots \times a_N} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_N}{N}.$$

- Demostración de Cauchy de cómo

$$\sqrt[N]{a_1 \times \cdots \times a_N} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_N}{N}.$$

En tres pasos:
Paso 1^o (ya probado): La desigualdad es cierta para $N = 2$.
Paso 2^o: si es cierta para N, entonces también lo será para $N-1$.
Paso 3^o: si es cierta para N, entonces también lo será para $2N$.
Prueba del paso 2^o: llamemos $a := \sqrt[N-1]{a_1 \times \cdots \times a_{N-1}}$. Entonces:

$$\frac{a_1 + \cdots + a_{N-1} + a}{N} \geq \sqrt[N]{a_1 \times \cdots \times a_{N-1} \times a} = \sqrt[N]{a^{N-1} \times a} = a,$$

de donde

$$a_1 + \cdots + a_{N-1} \geq (N-1)\, a$$

y, por tanto,

$$\frac{a_1 + \cdots + a_{N-1}}{N-1} \geq \sqrt[N-1]{a_1 \times \cdots \times a_{N-1}}.$$

Prueba del paso 3^o: para $a_1, \ldots, a_{2N} \geq 0$ se sigue que (usando la hipótesis para pasar de la 2^a a la 3^a línea):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2N} a_k &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2N-1} + a_{2N}) \\
&\geq 2\left(\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4} + \cdots + \sqrt{a_{2N-1} a_{2N}}\right) \\
&\geq 2N \sqrt[N]{\sqrt{a_1 a_2}\sqrt{a_3 a_4} \cdots \sqrt{a_{2N-1} a_{2N}}} \geq 2N \sqrt[2N]{a_1 a_2 a_3 a_4 \cdots a_{2N-1} a_{2N}}.
\end{aligned}$$

- (Más utilidades de la de la desigualdad de Cauchy-Schwarz-Bunyakowski) *Prueba que*

$$\begin{array}{rcl} \{a,b,c\},\{x,y,z\} & \Longrightarrow & ax+by+cz \leq \sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \{a,b,c\} & \Longrightarrow & ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2 \\ \{a,b,c\} & \Longrightarrow & abc\,(a+b+c) \leq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \\ \{a,b,c\} & : & a+b+c=1 \Longrightarrow ab+bc+ca \leq 1/3 \end{array}$$

La primera de ellas es de aplicación directa de la desigualdad de C-S-B. La segunda, igualmente, considerando como segunda familia $\{x,y,z\}$ la permutación $\{b,c,a\}$ de la primera. También puede obtenerse por técnicas directas de cálculo, sin más que tener presente la no negatividad de los cuadrados:

$$0 \leq (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 2\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right).$$

Claramente, se alcanza la igualdad $ab+bc+ca=a^2+b^2+c^2$ cuando $a=b=c$.

La tercera es consecuencia de la primera:

$$\begin{array}{rcl} abc\,(a+b+c) & = & (ac)\,(ab)+(ba)\,(cb)+(bc)\,(ac) \\ & \leq & \sqrt{c^2a^2+a^2b^2+b^2c^2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \\ & \leq & b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2. \end{array}$$

Finalmente, de la segunda:

$$\begin{array}{rcl} ab+bc+ca & \leq & a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2\,(ab+bc+ca) \\ & = & 1-2\,(ab+bc+ca), \end{array}$$

de donde despejando, se tiene lo deseado.

- Para reales positivos a, b y c, si $(1+a)\,(1+b)\,(1+c)=8$, entonces $abc \leq 1$.

La condición de partida nos dice que

$$1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc=8.$$

Pero, por un lado, la desigualdad geométrico-aritmética nos dice que $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$; y por otro lado, la armónico geométrica nos da que $\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc}$, es decir, $3\,(abc)^{2/3} \leq ab+bc+ca$. Por ambas razones:

$$8 \geq 1+3\,(abc)^{1/3}+3\,(abc)^{2/3}+abc=\left(1+(abc)^{1/3}\right)^2,$$

de donde $\sqrt[3]{abc} \leq 1$, o equivalentemente, $abc \leq 1$.

Está claro que se alcanza la igualda cuando y sólo cuando $abc=1$.

- *¿Quién tiene más elementos,* $\mathbb{Z}$ *(el conjunto de los números enteros) o* $\mathbb{N}$ *(conjunto de los números naturales o de los enteros positivos)?*

El concepto que subyace de "igualdad del cardinal de dos conjuntos" es el de existencia de una relación "uno a uno" (o de aplicación biyectiva) entre ambos conjuntos. (Nadie duda qué significado tiene esto en el caso de conjuntos finitos.)

Anotando la función valor absoluto

$$|x| := \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

podremos definir la biyección entre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$ como:

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}; f(p) := \begin{cases} 2|p|, & \text{si } p \in -\mathbb{N} \\ 1, & \text{si } p = 0 \\ 2p+1, & \text{si } p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- *Prueba que* $\mathbb{N}^2$ *y* $\mathbb{N}$ *son equipotentes; es decir, existe una biyección de* $\mathbb{N}^2$ *en* $\mathbb{N}$.

Dispondremos los elementos (i,j) de $\mathbb{N}^2$ en la forma de cuadro infinito hacia la derecha y hacia abajo, comenzando en la esquina superior izquierda por el elemento $(1,1)$; concretamente:

$$\begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & \ldots & (1,j) & \ldots \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & \ldots & (2,j) & \ldots \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & \ldots & (3,j) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (i,1) & (i,2) & (i,3) & \ldots & (i,j) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

de modo que hay que buscar dónde "acomodar" cada elemento (i,j) de $\mathbb{N}^2$ en una posición n de $\mathbb{N}$. La idea genial será cómo conseguir evitar "irnos al infinito" por filas o columnas olvidando cómo acomodar a todos: descubrir que las diagonales formadas por los puntos con igual suma de sus coordenadas nos ayudará:

Una primera diagonal, con un único elemento, nos la da el punto $(1,1)$. Aquí, $1+1=2$.

La segunda diagonal, formada por dos elementos, será la formada por el $(2,1)$ y el $(1,2)$. Aquí es $1+2=2+1=3$.

Queda claro que el elemento (i,j) está en la fila $(i+j-1)$-ésima. Por tanto, los puntos situados en las i+j-2 filas anteriores han sido alojados entre las primeras posiciones $\frac{(i+j-2)(i+j-1)}{2}$ de $\mathbb{N}$. (Recuérdese cuánto suman los n primeros números naturales.) Ahora hay que considerar cómo alojar a (i,j): si atendiendo a su orden por filas o por columnas:

$$(i,i) \to \frac{(i+j-2)(i+j-1)}{2} + i,$$

por ejemplo.

- *La pareja López-Pérez organiza una fiesta a la que han invitado a otras tres parejas. Al llegar a la fiesta se realizan una serie de saludos que aportan unos datos curiosos: al preguntar López al final de la fiesta a cada una de las otras siete personas que cuántos saludos relizó a la llegada a la fiesta, obtuvo siete respuestas distintas. (Es obvio que nadie se saludó ni a sí mismo ni a su pareja.) ¿Podrías decirme el número de personas que saludó a Pérez?*

Está claro que Pérez recibió siete respuestas distintas, y que éstas fueron 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Llamaremos A, B, C, D, E, F, G y H a los ocho invitados. (La ayuda de un dibujo será aquí determinante.)

Podemos suponer que fue A quien realizó los seis saludos y, sin pérdida de generalidad, los realizó a B, C, D, E, F y G. Con ello, será H la pareja de A. La información "A y H son pareja con un número respectivo de saludos de 6 y 0", la podemos escribir así: $(A, H) \sim (6, 0)$.

Ahora, podemos suponer que sea B quien realiza los 5 saludos a (de A ya lo ha recibido), por ejemplo, C, D, E y F; de modo que no habrá saludado ni a G ni a H, y por tanto: $(B, G) \sim (5, 1)$.

La siguiente suposición será que es C quien realiza 4 saludos (dos ya los ha recibido de A y de B), siendo a D, E y F a quienes podrá hacerlos. Cualquiera de ellos tres ya ha recibido 2. Podemos hacer que F sea la pareja de C y así $(C, F) \sim (4, 2)$.

Esto conlleva, a su vez, que los López-Pérez quedan caracterizados como $(D, E) \sim (3, 3)$. Por tanto, Pérez hizo tres saludos.

- *Prueba que si las longitudes de los lados de un triángulo vienen dadas por a, b y c, entonces*

$$3\left(ab + bc + ca\right) \leq \left(a + b + c\right)^2 \leq 4\left(ab + bc + ca\right).$$

Haciendo cálculos $\left(a + b + c\right)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\left(ab + bc + ca\right)$; por tanto, lo que se precisa es probar que:

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 2\left(ab + bc + ca\right).$$

Como $0 \leq \left(a - b\right)^2 + \left(b - c\right)^2 + \left(c - a\right)^2 = 2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) - 2\left(ab + bc + ca\right)$, se sigue que

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2,$$

lo cual prueba la primera desigualdad.

El dato que nos aporta el problema es que

$$\begin{cases} a < b + c \\ b < c + a \\ c < a + b, \end{cases}$$

lo cual conlleva que $a^2 + b^2 + c^2 < a\left(b + c\right) + b\left(c + a\right) + c\left(a + b\right) \leq 2\left(ab + bc + ca\right)$, y aporta la veracidad de la segunda desigualdad.

- Si tres números reales a, b y c están en relación $a^2+b^2+c^2=1$, entonces

$$-1/2 \leq ab+bc+ca \leq 1$$

y

$$-\sqrt{3} \leq a+b+c \leq \sqrt{3}.$$

Por la deigualdad de C-S-B, $ab+bc+ca \leq \sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2+a^2} = a^2+b^2+c^2=1$. En caso de no disponer de C-S-B, también se puede lograr la segunda desigualdad mediante cálculos directos:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 2\left(a^2+b^2+c^2\right)-2\left(ab+bc+ca\right) \\ &= 2-2\left(ab+bc+ca\right). \end{aligned}$$

Observa cómo en el caso de que $a=b=c=1/\sqrt{3}$ se sigue que $ab+bc+ca=1$.

Para la otra desigualdad, también cálculos directos nos dan:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right) \\ &= 1+2\left(ab+bc+ca\right). \end{aligned}$$

En particular, para este caso, tenemos $(a+b+c)^2=0$ si y sólo si $ab+bc+ca=-1/2$.

Finalmente, para la segunda inecuación:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right) \\ &\leq 3\left(a+b+c\right)^2 = 3. \end{aligned}$$

Y es claro que los valores extremos los alcanzamos si y solo si, respectivamente, $a=b=c=1/\sqrt{3}$ y $a=b=c=-1/\sqrt{3}$.

- Prueba que para a y b reales positivos y todo natural n se tiene que

$$(n-1)\,a^n+b^n \geq na^{n-1}b.$$

Pudiera sugerir una inmediata aplicación de la desigualdad geométrico-aritmética..., pero no:

$$\frac{(n-1)\,a^n+b^n}{2} \geq \sqrt{(n-1)\,a^nb^n}...$$

Ante este fracaso inicial, lo haremos de dos maneras distintas:

Método 1. Usando la desigualdad geométrico-aritmética para n valores:

$$x_1=\cdots=x_{n-1}=a^n \text{ y } x_n=b^n$$

entonces:

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)\,a^n+b^n}{n} &= \frac{a^n+\cdots+a^n+b^n}{n} = \frac{x_1+\cdots+x_{n-1}+x_n}{n} \\ &\geq \sqrt[n]{x_1\cdots x_{n-1}x_n} = \sqrt[n]{a^n\cdots a^nb^n} = a^{n-1}b. \end{aligned}$$

Método 2. Por inducción sobre n. Para $n = 1$ es trivial. Supongamos cierta la fórmula para cierto natural n, y comprobemos su veracidad para $n + 1$:

$$\begin{aligned} na^{n+1} + b^{n+1} &= na^{n+1} + bb^n \geq na^{n+1} + b\left[na^{n-1}b - (n-1)\,a^n\right] \\ &= na^{n+1} - (n-1)\,ba^n + nb^2a^{n-1}; \end{aligned}$$

lo cual nos dará lo deseado cuando probemos que ese minorante será mayor o igual a $(n+1)\,a^n b$:

$$\begin{aligned} na^{n+1} - (n-1)\,ba^n + nb^2a^{n-1} &\geq (n+1)\,a^n b \\ &\iff na^{n+1} + nb^2a^{n-1} \geq [(n+1) + (n-1)]\,a^n b \\ &\iff na^{n-1}\left(a^2 + b^2\right) \geq 2na^n b \\ &\iff a^2 + b^2 \geq 2ab, \end{aligned}$$

lo cual siempre es cierto.

- *Calcula el número de ceros en los que termina el número* 1000! *(Recordemos que el factorial de* 1000 *es el número* $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 999 \times 1000$*.)*

Las potencias de 10, se obtendrán a partir de los productos de números pares y de múltiplos de 5. Como los segundos se presentan en un número menor, es este número -el de las potencias de 5- el que hay que calcular:

Para 5^1 existen 200 múltiplos.
Para 5^2 existen 40 múltiplos.
Para 5^3 existen 8 múltiplos.
Para 5^4 existe un único múltiplo.
Como $5^5 = 3000 > 1000$, las potencias quintas no intervendrán. Por tanto, sumando todas ellas, tendremos 249 ceros.

- *Encuentra el número de ceros en los que acaba el número* 2015!.

Las potencias de 10, se obtendrán a partir de los productos de números pares y de múltiplos de 5. Como los segundos se presentan en un número menor, es este número -el de las potencias de 5- el que hay que calcular:

Para 5^1 existen 403 múltiplos.
Para 5^2 existen 80 múltiplos.
Para 5^3 existen 16 múltiplos.
Para 5^4 existen 3 múltiplos.
Como $5^5 = 3000 > 2015$, las potencias quintas no intervendrán. Por tanto, sumando todas ellas, tendremos 502 ceros.

- *Encuentra todos los números naturales de cuatro cifras tales que coincidan con el cubo de la suma de sus dígitos.*

Observamos cómo lo que se nos pide es encontrar a, b, c y d en $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (con $d \neq 0$) tales que

$$dcba = d10^3 + c10^2 + b10 + a = (a + b + c + d)^3\,.$$

Por tanto, hemos de buscar los $n = dcba \in \mathbb{N}$, tal que $1000 \leq n \leq 9999$; y de entre ellos, buscaremos entre los cubos perfectos:

$\sqrt[3]{n}$	$n = dcba$	$a+b+c+d$	$(a+b+c+d)^3$
10	1000	1	1
11	1331	8	512
12	1728	18	5832
13	2197	18	5832
14	2744	17	4913
15	3375	18	5832
16	4096	19	6895
17	*4913*	17	*4913*
18	*5832*	18	*5832*
19	6895	28	> 10000
20	8000	8	512
21	9265	18	5832

Por tanto, resultan dos posibles elecciones para n: 4913 y 5832.

- *En un cuadrado de lado 1 pinchamos 5 puntos cualesquiera. Prueba que siempre habrá, al menos, dos de ellos que estén a una distancia menor que* $\sqrt{2}/2$.

Se trata de la una aplicación del llamado Principio del Palomar: los primeros cuatro puntos se pueden colocar en los cuatro vértices del cuadrado. Ahora está claro que el quinto punto, "caiga donde caiga", caerá a una distancia menor de $\sqrt{2}/2$ alguno de los cuatro vértices.

- *Prueba que toda función se puede escribir como la suma de una función par y otra función impar. ¿Es única tal descomposición?*

Una función g se dice par si $g(-x) = g(x)$ para todo punto x. Una función h se dice impar si $h(-x) = -h(x)$ para todo punto x. También lo serán sus productos por constantes.

Ahora, si f es una función cualquiera, vamos a definir convenientes funciones a partir de ella:

$$g(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad h(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Es fácil comprobar que se trata de funciones que verifican las respectivas definiciones de funciones par e impar, respectivamente. Y es ya trivial confirmar que

$$f(x) = g(x)/2 + h(x)/2.$$

La unicidad nos la da la discusión del sistema 2×2 siguiente:

$$\begin{cases} 2g(x) = f(x) + f(-x) \\ 2h(x) = f(x) - f(-x) \end{cases}$$

cuyo determinante es $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, y por tanto la solución (g, h) es única.

- *Comprueba que no existe ninguna función real de variable real $f : R \to R$ satisfaciendo $f\left(x^2+y\right) = f(x) + y^2$ para cualesquiera x e y en R.*

Supongamos que existiese. Para algunos valores ha de pasar que:
$x = 0, y = 1 \implies f(1) = f\left(1^2+0\right) = f\left(0^2+1\right) = f(0) + 1^2 = f(0) + 1$
$x = 1 = -y \implies f(0) = f\left(1^2+(-1)\right) = f(1) + 1$
Por tanto, $f(1) = f(0) + 1 = f(0) - 1$, lo cual es imposible.

- ¿Qué forma ha de tener cualquier función $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$?

Se trata de un ejemplo típico de resolución por casos: en la perspectva de que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, lo que haremos será resolverlo en tres pasos.

Lo primero que podemos ver es que se trata de una función par, pues para cada x:
$0 = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) \implies f(-x) = -f(x)$.
Ensayamos en primer lugar algunos casos para $n \in \mathbb{N}$:
$f(2) = f(1) + f(1) = 2f(1) \implies f(2) = 2f(1)$
Por inducción, supondremos que $f(n) = nf(1)$
$f(n+1) = f(n) + f(1) = nf(1) + f(1) = (n+1) f(1)$.
Por tanto, por inducción, tenemos que $f(n) = nf(1)$ para n en $\mathbb{N}$.
Observamos que: $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0) \implies f(0) = 0 = 0f(0)$.
Por tanto, $f(p) = pf(1)$ para todo p en $\mathbb{Z}$.
Como $f(1) = f\left(\frac{n}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \overset{n}{\cdots} + \frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right)$, se tiene $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} f(1)$, para n en $\mathbb{N}$.
Por tanto, $f\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p} f(1)$, para p en $\mathbb{Z}$
Finalmente, para m y n en $\mathbb{N}$, se tiene, por inducción sobre m (y para n arbitrario), que:
$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \overset{m}{\cdots} + \frac{1}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n} f(1)$, para $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$.
Por simetría par de la función f se tiene que $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} f(1)$, para $\frac{m}{n}$ arbitrario en $\mathbb{Q}$.
En resumen:
$$f(x) = \alpha x, \forall x \in \mathbb{Q},$$
donde la constante α viene dada por el valor de $f(1)$. Por tanto, las únicas funciones aditivas en $\mathbb{Q}$ son las funciones lineales.

- *Prueba que $\mathbb{R}$ no es numerable.*

Vamos a comprobar que en $\mathbb{R}$ existen subconjunto no numerables y que, por tanto, $\mathbb{R}$ también lo será. El método consistirá en hacer una reducción al absurdo: supondremos que el intervalo $[0,1]$ es numerable, es decir $[0,1] = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ (o sea, que todos los números entre 0 y 1 están enentre los de esa enumeración), y construiremos un elemento x del intervalo unidad que no sea ninguno de esos x_k, de modo que llegaremos a contradicción. Podemos suponer que estos x_k pueden escribirse así:

$$\begin{aligned}
&x_1 = 0, x_{11} x_{12} x_{13} \dots x_{1n} \dots \\
&x_2 = 0, x_{21} x_{22} x_{23} \dots x_{2n} \dots \\
&x_3 = 0, x_{31} x_{32} x_{33} \dots x_{3n} \dots \\
&\vdots \\
&x_n = 0, x_{n1} x_{n2} x_{n3} \dots x_{nn} \dots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

donde cada $x_{ij} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Ahora usaremos un método muy creativo (llamado proceso diagonal de Cantor, en honor a su autor), donde los números x_{kk} jugarán un papel central. Vamos a construir, en pasos sucesivos, el

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$$

Primer paso: elegiremos a_1 de modo que $x \neq x_1$. Sea

$$a_1 := \begin{cases} x_{11} + 1, & \text{si } x_{11} < 9 \\ 0, & \text{si } x_{11} = 9 \end{cases}$$

Segundo paso: elegiremos a_2 de modo que $x \neq x_2$. Sea

$$a_2 := \begin{cases} x_{22} + 1, & \text{si } x_{22} < 9 \\ 0, & \text{si } x_{22} = 9 \end{cases}$$

n-ésimo paso: elegiremos a_n de modo que $x \neq x_n$. Sea

$$a_n := \begin{cases} x_{nn} + 1, & \text{si } x_{nn} < 9 \\ 0, & \text{si } x_{nn} = 9 \end{cases}$$

Por tanto, de manera recursiva se obtiene $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots \notin [0,1]$ y, en conclusión, al llegar a un absurdo, tendremos que no podemos enumerar el intervalo $[0,1]$.

- *Encuentra una biyección explícita entre los intervalos* $[0,1]$ *y* $[0,1[$.

En el intervalo unidad tenemos una familia numerable muy conocida: la sucesión nula $(1/n)$. Ella será la que nos dé la idea: si hacemos $1/n \to 1/(n+1)$ y dejamos tranquilos a todos los demás números, tendremos lo deseado:

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{si } x = \frac{1}{n} \\ x, & \text{resto} \end{cases}$$

Claramente, f es una biyección de $[0,1]$ en $[0,1[$.

- *Si los números reales a, b y c satisfacen las relaciones*

$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ ab+bc+ca=-1 \\ abc=2 \end{cases}$$

calcula $a^k+b^k+c^k$ para $k=1,\,2,\,3$.

Caso $k=2$. Usando la primera ecuación y desarrollando el cuadrado del trinomio:

$4=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2\,(ab+bc+ca)=a^2+b^2+c^2-2$, donde hemos usado la segunda ecuación. Por tanto, $a^2+b^2+c^2=6$.

Caso $k=3$. Usando la primera ecuación y desarrollando el cubo del trinomio:

$8=(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+6abc+3\left[a^2\,(b+c)+b^2\,(c+a)+c^2\,(a+b)\right]$

$=a^3+b^3+c^3+12+3\,[a\,(ab+ac)+b\,(bc+ba)+c\,(ca+cb)]$, donde hemos usado la tercera ecuación y hemos preparado el corchete para usar la segunda ecuación:

$=a^3+b^3+c^3+12-3\,[a\,(1+bc)+b\,(1+ca)+c\,(1+ab)]$

$=a^3+b^3+c^3+12-3\,[3abc+(a+b+c)]$

$=a^3+b^3+c^3+12-3\,(6-1)=a^3+b^3+c^3-3$, luego $a^3+b^3+c^3=11$.

Caso $k=4$. Análogamente, los cálculos nos conducen:

$16=(a+b+c)^4=a^4+b^4+c^4+4\left[a^3\,(b+c)+b^3\,(c+a)+c^3\,(a+b)\right]+$

$+6\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+12\left(a^2bc+ab^2c+abc^2\right)$

$=a^4+b^4+c^4+4\left[a^3\,(2-a)+b^3\,(2-b)+c^3\,(2-c)\right]+$

$+6\left[a^2b\,(2-a-c)+b^2c\,(2-a-b)+c^2a\,(2-b-c)\right]+12abc\,(a+b+c)$

$=a^4+b^4+c^4+8\left(a^3+b^3+c^3\right)-4\left(a^4+b^4+c^4\right)+$

$+6\left[a^2b\,(2-a-c)+b^2c\,(2-a-b)+c^2a\,(2-b-c)\right]+48$

$=-3\left(a^4+b^4+c^4\right)+8\times 11+12\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)-$

$-6\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)-abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$=-3\left(a^4+b^4+c^4\right)+88+6\,[(2-a)+(2-b)+(2-c)]-12$

$=-3\left(a^4+b^4+c^4\right)+76+6\,[(b+c)+(c+a)+(a+b)]$

$=-3\left(a^4+b^4+c^4\right)+76+6\times 4=-3\left(a^4+b^4+c^4\right)+100\implies$

$\implies a^4+b^4+c^4=(100-16)\,/3=84/3$; es decir, $a^4+b^4+c^4=28$.

- *Calcula explícitamente la derivada n-ésima de la función $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$ con x en $\mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$.*

Se trata de un ejemplo de cómo hemos de seleccionar la expresión correcta para que se pueda alcanzar el objetivo de manera sencilla. Observa cómo si elegimos derivar "directamente" en la expresión dada de f, no alcanzamos el objetivo:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1-x^2\right)^{-1} \\ f'(x) &= 2x\left(1-x^2\right)^{-2} \\ f''(x) &= 2\left(1-x^2\right)^{-2}-8x\left(1-x^2\right)^{-3} \\ & \dots \end{aligned}$$

y ya podemos adivinar que el número de sumandos se duplica derivación a derivación, además de que intuir la complejidad de cada uno de ellos, nos lleva a renunciar de esta vía.

Es posible una expresión adecuada de la función racional f mediante la descomposición de la misma en fracciones simples:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} = \frac{A(1+x) + B(1-x)}{1-x^2}$$

de donde la identidad de polinomios $1 = (A+B) + (A-B)\,x$ nos dice que

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A - B = 0 \end{cases}$$

y, por tanto: $A = B = 1/2$. En consecuencia, $f(x) = \left[(1-x)^{-1} + (1+x)^{-1}\right]/2$ y ahora es muy sencillo derivar consecutivamente:

$$\begin{aligned}
&f'(x) = \left[(1-x)^{-2} - (1+x)^{-2}\right]/2 \\
&f''(x) = \left[2\,(1-x)^{-3} + 2\,(1+x)^{-3}\right]/2 \\
&f'''(x) = \left[2 \times 3\,(1-x)^{-4} - 2 \times 3\,(1+x)^{-4}\right]/2 \\
&\ldots \\
&f^{n)}(x) = n!\left[(1-x)^{-(n+1)} + (-1)^n\,(1+x)^{-(n+1)}\right]/2
\end{aligned}$$

y, por inducción, podemos comprobar la validez de la fórmula:

$$\begin{aligned}
f^{n+1)}(x) &= \left(f^{n)}\right)'(x) \\
&= n!\left[-(n+1)(-1)(1-x)^{-(n+2)} + (-1)^n(-1)(n+1)(1+x)^{-(n+2)}\right]/2 \\
&= (n+1)!\left[(1-x)^{-(n+2)} + (-1)^{n+1}(1+x)^{-(n+2)}\right]/2,
\end{aligned}$$

lo cual confirma lo deseado.

- *Prueba que* $2014^{2013} - 1013^{2013} - 1001^{2013} = 2014^3 - \overset{\bullet}{\widehat{1013^3}} - 1001^3$*, es decir, que el número* $2014^{2013} - 1013^{2013} - 1001^{2013}$ *es múltiplo de* $2014^3 - 1013^3 - 1001^3$*.*

Se trata de un ejercicio en el que la buena (o mala) elección te llevará al éxito (o, por el contrario, al fracaso). Como $2014 = 1013 + 1001$, parece que haciendo $a = 1013$ y $b = 1001$, tendríamos que desarrollar, mediante la fórmula de Newton, en $2014^{2013} = (1013 + 1001)^{2013}$. Pero esto no nos llevaría a nada al respecto de sacar factor común $(a+b)^3 - a^3 - b^3$ de la expresión $(a+b)^{2013} - a^{2013} - b^{2013}$, es imposible. Sin embargo, si hacemos $a = 2013$ y $b = 1013$, correremos mejor suerte:

$$\begin{aligned}
a^{2013} - b^{2013} - (a-b)^{2013} &= \binom{2013}{1} a^{2012} b - \binom{2013}{2} a^{2011} b^2 + \cdots \\
&\quad \cdots + \binom{2013}{1005} a^{1006} b^{1005} - \binom{2013}{1006} a^{1005} b^{1006} + \cdots \\
&\quad \cdots + \binom{2013}{2011} a^2 b^{2011} - \binom{2013}{1006} a b^{2012} \\
&= \overset{\bullet}{3} ab \left(a^{2011} - a^{2010} b + \cdots + a b^{2010} - b^{2011}\right) \\
&= \overset{\bullet}{3} ab\,(a-b) \left(a^{2010} + \cdots + b^{2011}\right) = 3a\overset{\bullet}{\widehat{b\,(a-b)}};
\end{aligned}$$

y es que $a^3 - b^3 - (a-b)^3 = 3ab\,(a-b)$.

- *Calcula el área en unidades cuadradas de la región R del plano dada por las condiciones*

$$R := \{(x,y) : |x| - |y| < 1, |y| < 1\}.$$

Se trata de la región determinada por las cuatro rectas:

$$x \pm y = \pm 1$$

y las dos rectas $y = \pm 1$. Concretamente:

$$\begin{aligned}
-1 &< y < 1 \\
x - 1 &< y < 1 + x \\
-1 - x &< y < 1 - x.
\end{aligned}$$

Son 6 unidades de áea.