Heurísticos en la Resolución de Problemas

Antonio Frías Zorrilla

Almería, octubre de 2016

Heurísticos en la RP		Macroheurísticos		Microheurísticos
Estrategias generales		Generalización/Inducción (G/I)		ECP, HT, BR, HC
		Análisis-Síntesis (A-S)		THA
		Modelo Cartesiano (MC)		MG, EYE
		Analogía (An)		MG, MoCo, MoDa, PMS
		Razonamiento Proporcional (RaP)		MG
		Contradicción/ Reducción Absurdo (C/RA)		EP SQN
Técnicas heurísticas	Destrezas Heurísticas DH	Organización de la Información	EP,EYE	Hacer una lista exhaustiva (HLE)
			G/I	Hacer una tabla (HT)
			MC	Modelación por un gráfico (MG)
	Herramientas Heurísticas HH	Transformación del Problema	G/I, ECP	Buscar regularidades (BR)
			MoCo, PMS	Buscar subproblemas (BS)
			G/I	Estudiar Casos Particulares (ECP)
			PMS	Estudiar Casos Especiales (ECE)
			MC	Ensayo y Error (EYE)
			C/RA	Eliminar Posibilidades (EP)
			MoDa, MoCo, An	Problema más Sencillo (PMS)
			A-S	Trabajar hacia atrás (THA)
			¿Qué ocurriría si…?	Modificar las condiciones (MoCo
				Modificar los datos (MoDa)
				Modificar las metas (MoMe)
				Supongamos que no (SQN)
	Sugerencias Heurísticas SH	Guiar en el proceso de RP -Indican un camino a seguir, pero no dicen cómo hay que continuar -Autointerrogación del resolutor -Se aplican en fases de la resolución del problema		Distingue los datos y la incógnita
				¿Has usado todos los datos?
				¿Conoces un problema similar?
				Familiarízate con el problema
				Haz conjeturas (HC)
				Revisa el proceso
				Verifica la solución obtenida
				¿Puedes encontrar la solución de

Generalización/Inducción

- Los procesos de abstracción y generalización están muy relacionados.

- Según Bell, en matemáticas, hay tres tipos de abstracción:

- 1. Reconocimiento de conceptos o propiedades.
- Cuando vemos una propiedad en varios casos particulares y la hacemos extensiva a un determinado conjunto de objetos.
- Ej.: 23x64 = 46x32. ¿Qué clase de números de dos cifras tienen esta propiedad?

- 2. Creación de conceptos.
- Cuando se pasa de la consideración de un objeto singular a la creación de una nueva clase de la que el objeto es un miembro.
- Ej.: objetos-ejemplos-cuadrado

- 3. Extensión de conceptos. Cuando se adopta un nuevo significado para un concepto que incluye al viejo como un caso especial.
- Ej.: extensión del concepto cuadrado por el de isometría del cuadrado.

Generalización/Inducción

- Observamos que
- $1 + 3 = 4$,
- $1 + 3 + 5 = 9$,
- $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ …
- Podemos obtener por inducción una generalización de esta propiedad y luego podemos demostrarla por inducción completa.
- La inducción tiene como elementos constitutivos la generalización, la particularización y la analogía.
- En la Resolución de Problemas la Generalización/Inducción (G/I) es una estrategia general (EG) o Macroheurístico, para llevarla a cabo hacen falta otras técnicas particulares (Microheurísticos DH, HH y SH) que son:

1. Estudiar casos particulares (ECP)
2. Organizar sistemáticamente los ejemplos o casos particulares en una tabla (HT)
3. Buscar y reconocer regularidades y patrones (BR)
4. Hacer conjeturas (HC)
5. Generar ejemplos para comprobar la conjetura
6. Justificar/demostrar la conjetura y la generalización

Generalización/Inducción

- Problema 1:
- ¿Es cierta la siguiente conjetura: el cubo de un número natural es la diferencia de dos cuadrados perfectos?

- Problema 2:
- Si tienes una circunferencia con cuatro puntos igualmente espaciados, que la dividen en cuatro arcos iguales y unimos cada punto con todos los demás, el círculo queda dividido en 8 regiones separadas.
- En cuántas regiones quedará dividido el círculo si en la circunferencia tenemos siete puntos, que la dividen en siete arcos iguales.

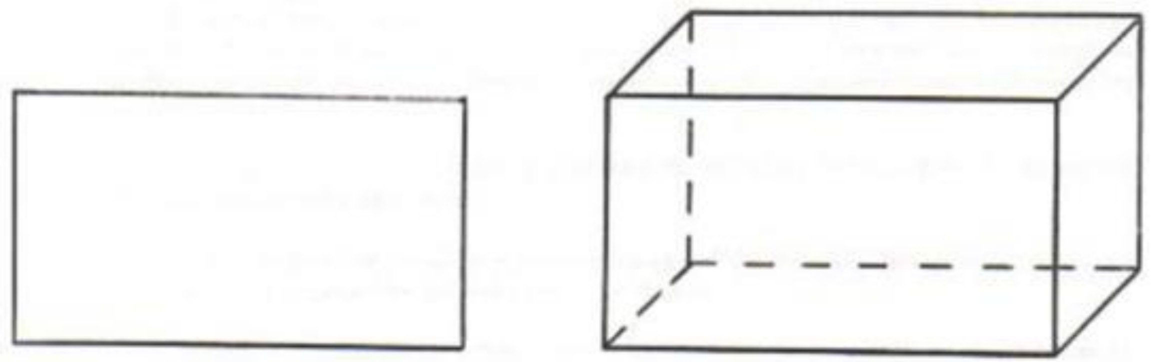
- Problema 3:
- En un papiro egipcio hemos encontrado la expresión $4n^2 - 4n - 1$. ¿Podemos asegurar que siempre nos va a dar un número primo? ¿Puedes encontrar una ley general para estos números?

Analogía

- Ejemplo: *Un paralelogramo rectangular es análogo a un paralelepípedo rectangular*, pues las relaciones que existen entre los lados del primero son semejantes a las que existen entre las caras del segundo:

- Cada lado del rectángulo es paralelo a uno solo de los otros lados y perpendicular a los lados restantes.
- Cada cara del paralelepípedo rectangular es paralela a una sola de las otras caras y perpendicular a las caras restantes.

- Consideremos como "elemento límite" el lado del rectángulo y la cara del paralelepípedo. Podemos entonces reducir las dos consideraciones anteriores a una sola que se aplique a ambas figuras:
- Cada elemento límite es paralelo a uno sólo y perpendicular a los restantes elementos límites.



Analogía

- Dos problemas son análogos cuando entre ellos hay algo más que un simple parecido, hay ciertas relaciones en las que coinciden.
- La búsqueda de la analogía consiste en apreciar si el parecido es algo más que casual, es apreciar que el parecido es estructural.
- Los siguientes problemas son análogos:
- 1. ¿Cuántos segmentos distintos determinan 10 puntos en una recta?
- 2. En una competición deportiva hay 12 equipos y cada uno debe jugar un partido con todos los demás, ¿cuántos partidos tendrán lugar en dicha competición?
- Para determinar la analogía entre dos problemas hemos de comprobar que las relaciones entre las propiedades de ambos son estructurales, no solamente formales
- La analogía es un buen heurístico ya que en muchos casos, dado un problema, a veces para su resolución se puede utilizar el método y/o el resultado de un **problema análogo más sencillo**.

Inferencia por Analogía

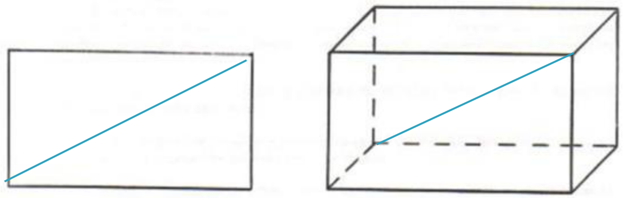
- Hay un razonamiento plausible cuando hacemos una inferencia por analogía. Si vemos que dos objetos *se parecen* en varios de sus elementos característicos, podemos conjeturar, por analogía, que también se van a *parecer* en otro elemento más. No es una conclusión segura, pero es factibl*e.* Esto nos puede llevar al siguiente razonamiento:

1. A es análogo a B
2. Una propiedad P es verdadera en B

- Conclusión: La propiedad P’ (análoga P) en A es más creíble y por tanto podemos darla por válida.
- Ejemplo:

1. El rectángulo y el paralelepípedo rectangular son figuras análogas.
2. El teorema de Pitágoras expresa la relación entre la diagonal y los lados de un rectángulo como $d^2 = a^2 + b^2$

- Conclusión: Es creíble que la relación entre la diagonal del paralelepípedo rectangular y sus aristas sea: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$
- Esta relación se puede demostrar fácilmente aplicando el teorema de Pitágoras



Inferencia por Analogía

- Ejemplo:
- Basándonos en que el triángulo y el tetraedro son figuras análogas, una del plano y otra del espacio, podríamos hacer la siguiente inferencia:

1. Si las bisectrices de los ángulos del triángulo se cortan en un punto y este punto es el centro del círculo inscrito; entonces:
2. En el tetraedro los planos bisectrices de los ángulos diedros se cruzan en un punto y este punto es el centro de la esfera inscrita

La cual es cierta.

Pero también podemos hacer esta otra:

1. Si cualquier triángulo puede recubrir el plano, entonces:
2. Cualquier tetraedro puede recubrir el espacio

La cual NO es cierta.

- Estamos abriendo nuevas propiedades de un tetraedro mediante el razonamiento por analogía.
- Estas propiedades tienen, por supuesto, que ser demostradas.
-
- Problema: Haz otra extensión por analogía del teorema de Pitágoras en el plano (con triángulos) para el espacio (con tetraedros)

El Modelo Cartesiano (MC)

- Descartes en una de sus obras "Reglas para la Dirección del Espíritu" proyectaba desarrollar un método universal de resolución de problemas, que se puede resumir en:

1. Convertir, primero, todo problema en un problema matemático.
2. Convertir, después, todo problema matemático en un problema de álgebra.
3. Convertir, por último, todo problema de álgebra en la resolución de una sola ecuación.

- Descartes indicaba un conjunto de reglas para realizar este propósito, que podemos sintetizar en:

1. Comprender el problema y **determinar las incógnitas**.
2. Examinar el problema de la forma más natural y **establecer las relaciones entre incógnitas y datos**.
3. Dividir la condición en partes, de modo que de cada una de ellas salga una ecuación, obteniendo así un **sistema de ecuaciones**.
4. Reducir el sistema a la **resolución de una sola ecuación.**

El Modelo Cartesiano (MC)

- Problema1.
- ¿Cuántos años tienen?
- Yo tengo dos veces más años que los que tú tenías cuando yo tenía los años que tú ahora tienes; pero, cuando tú tengas tantos años como yo tengo ahora, entonces, tendremos entre los dos 63 años.

- Problema 2.
- Edades de familia
- • Dígame abuelo... ¿Qué edad tiene su hija?
- • Tiene tantas semanas como días tiene mi nieta.
- • ¿Y qué edad tiene su nieta?
- • Tiene tantos meses como años tengo yo.
- • Entonces... ¿Qué edad tiene usted?
- • Los tres juntos tenemos exactamente 100 años.
- ¿Cuál es la edad de cada cual?

- Problema 3.
- Los Gómez y los López son dos familias que cuando se encuentran intercambian múltiples saludos. Los hombres de ambas familias se abrazan; las mujeres y los hombres con las mujeres se besan. Una tarde al encontrarse en el parque se intercambiaron 35 abrazos y 42 besos. ¿Cuántos hombres y mujeres componen ambas familias?

Relación de problemas para usar destrezas y herramientas heurísticas

- En cada uno de los siguientes problemas es muy relevante el uso de alguno de los heurísticos antes mencionados:
- 1. Un cartero motorista fue enviado a recoger el correo al aeropuerto. El avión llegó con adelanto y el correo fue enviado a la oficina con un cartero a caballo. Después de media hora, el cartero a caballo encuentra al motorista en la carretera y le da el correo. El motorista regresa a la oficina 20 minutos antes de lo esperado. Con cuántos minutos de adelanto llegó el avión.
- 2. Acertijo de Einstein (para que lo intenten en casa y con tiempo)
- 3. Cuántos números naturales tienen las siguientes propiedades:
- a) Son de cuatro cifras
- b) Todas las cifras son impares
- c) Al dividirlo por 5, se obtiene exactamente un número de cuatro cifras, todas impares
- 4. Nos llamamos Antonio, Baltasar y Claudio, y los tres tenemos hijos.
- Antonio tiene como mínimo una chica y dos veces tantos chicos como chicas.
- Baltasar tiene como mínimo una chica y tres veces tantos chicos como chicas.
- Claudio tiene como mínimo una chica y un número de chicos igual al de las chicas más tres.
- Si te digo el número total de nuestros hijos (un número inferior a 25), sabrás cuántos hijos tengo yo, pero no cuántos tienen cada uno de los otros dos. Entre todos tenemos…
- ¿Cuál de los personajes habla?

Relación de problemas para usar destrezas y herramientas heurísticas

- En cada uno de los siguientes problemas es muy relevante el uso de alguno de los heurísticos antes mencionados:
- 5. Cuatro mujeres viven en ciudades diferentes.
  - 1. Una de las ciudades es Almería.
  - 2. La mujer de A Coruña, la de Granada y Rosa no se conocen.
  - 3. Carmen y la mujer de Córdoba son primas.
  - 4. Ni Beatriz ni Carmen viven en el Mediterráneo.
  - 5. Ana es de una ciudad costera.
  - Dónde vive cada una.
- 6. Calcula cuatro primos que tienen la siguiente forma:
- AA, BAB, BACD, AAAC
- 7. Tres mujeres, Isabel, Dorotea y Luisa, están casadas con tres hombres, Bernabé, Casimiro y Desiderio. Cada pareja tiene un hijo, siendo los nombres de los tres muchachos Adán, Enrique y Víctor. A partir de la siguiente información, identifica a cada matrimonio y sus respectivos hijos.
  - 1. Desiderio no es el marido de Luisa ni el padre de Enrique.
  - 2. Isabel no es la esposa de Casimiro ni la madre de Adán.
  - 3. Si el padre Adán es Casimiro o Desiderio, Luisa es la madre de Víctor.
  - 4. Si Luisa es la esposa de Casimiro, Dorotea no es la madre de Adán.

Relación de problemas para usar destrezas y herramientas heurísticas

- En cada uno de los siguientes problemas es muy relevante el uso de alguno de los heurísticos antes mencionados:

- 8. Una persona tiene x años en el año x^2. ¿Qué edad tiene el 1960?

- 9. Tres personas deciden jugar a tirar monedas a ver si coinciden en cara o cruz. Cada uno arroja una moneda, y el que no coincide con los otros dos pierde. El perdedor debe doblar la cantidad de dinero que cada oponente tenga en ese momento. Después de tres jugadas, cada jugador ha perdido una vez y tiene 240 euros. ¿Cuánto tenía cada uno al principio?

- 10. Los mejores vendedores de periódicos han formado una sociedad. Se distribuyen las ventas de la siguiente forma: Juan Pérez vende un periódico y la cuarta parte de los que quedan, luego Jorge García vende un periódico y la cuarta parte de los que quedan, después Benito Pérez vende un periódico y la cuarta parte de los que quedan, por último Manuel García vende un periódico y la cuarta parte de los que quedan. Al final han quedado algunos periódicos sin vender, menos de cien, que los han dividido en tres partes iguales y los venderán del modo siguiente, una parte la venden los Pérez y las otras dos partes las venden los García. ¿Quiénes han vendido más periódicos los Pérez o los García? ¿Cuántos más?