Resumen mediante ejercicios de la 1ª sesión: 22/11/2014

Olimpiadas RSME

UAL

La numeración que aparece se corresponde con la del listado de ejercicios disponible en Web para esa primera sesión.

(*) El último de los ejercicios contiene una subsanación de error que se cometió durante dicha sesión.

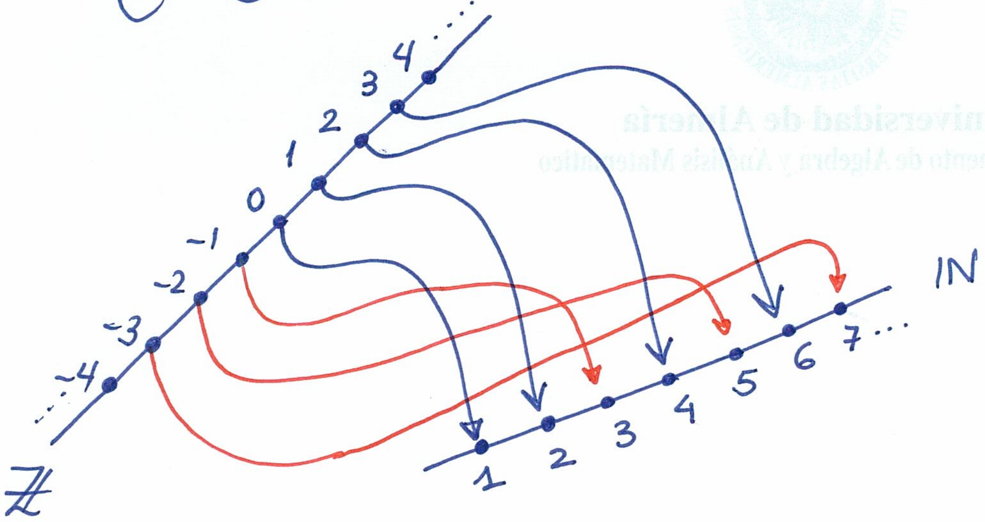
¡Disculpad ese lapsus!

Los números 17, 18, 26 y 27 no se resolvieron "en vivo", pero os resultarán de interés.

E. de Amo

edeamo@ual.es

¿Quién tiene más elementos, $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$?



<u>Criterio</u>: A y B son equipotentes ($\equiv$ tienen el mismo número de elementos) cuando existe alguna aplicación biyectiva de A en B.

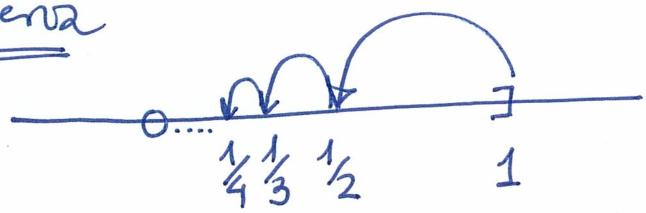
$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \,/\, f(p) = \begin{cases} 2p \ \dots\dots & p \in \mathbb{N} \\ 1 \ \dots\dots & p = 0 \\ 2|p|+1 \ \dots\dots & p \in -\mathbb{N} \end{cases}$$

14

$$]0,1] \longrightarrow]0,1[$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & x \in \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \\ x & x \notin \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

Observa



$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}$$ ... y en los demás, no importa.

Mecanismo:

"Efecto Dominó"

- Supuesto que ha caído el primero y que para cada uno que cae, también cae el siguiente, habrán caído todos.

Principio (de demostración) por inducción:

Si quieres probar una determinada fórmula que involucra A TODOS LOS NÚMEROS ENTERO A PARTIR DE UNO DADO, bastará que pruebes la fórmula:

a) Para el primero de ellos, y

b) Supuesta cierta para uno, has de probarla para el siguiente.

Es decir, que si $P(k)$ es una afirmación que haces para un cierto k, probar la veracidad de todo $P(n)$ con $n \geq k$ consiste en probar:

1º) $P(k)$ es cierto

2º) Si $P(n)$ es cierto, $n \geq k$, entonces $P(n+1)$ también lo es.

Ejemplo: $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{(n+1)n}{2}$

Para probar esta fórmula para todo natural n seguiremos la propuesta de hacerlo por inducción:

para $n=1 \Rightarrow 1 = \dfrac{(1+1)1}{2} \Rightarrow$ cierto.

Supondremos la fórmula cierta para n (es la llamada hipótesis de inducción -H.I.), y lo probaremos para $n+1$:

$$1+2+3+4+\cdots+n+(n+1) =$$

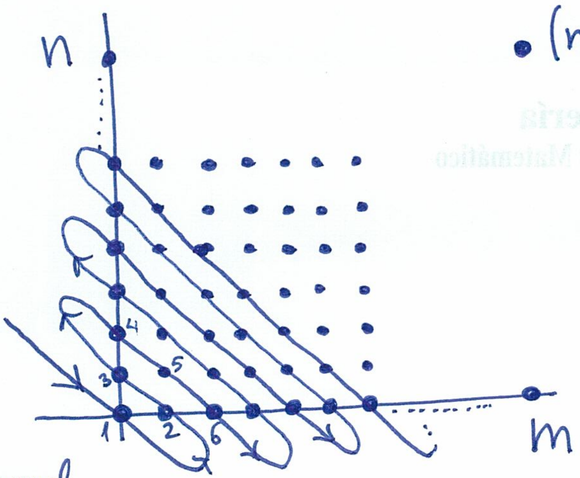
$$= [1+2+3+4+\cdots+n]+(n+1) \overset{H.I}{=}$$

$$= \frac{(n+1)n}{2}+(n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$ luego cierta para $n+1$, y así, para todo $n\in\mathbb{N}$.

(*) Usaremos esta fórmula para obtener "L" en el

15 Una biyección de $\mathbb{N}^2$ en $\mathbb{N}$:



• (m,n)

$$f(m,n) = \begin{cases} L+m & m+p-1 \text{ par} \\ L+n & m+p-1 \text{ impar.} \end{cases}$$

Diagonal

1^a ... $(1,1) \longrightarrow 1$

2^a $\begin{cases} (2,1) \longrightarrow 2 \\ (1,2) \longrightarrow 3 \end{cases}$

3^a $\begin{cases} (1,3) \longrightarrow 4 \\ (2,2) \longrightarrow 5 \\ (3,1) \longrightarrow 6 \end{cases}$

4^a $\begin{cases} (4,1) \longrightarrow 7 \\ (3,2) \longrightarrow 8 \\ (2,3) \longrightarrow 9 \\ (1,4) \longrightarrow 10 \end{cases}$

.....

$(m,n) \longrightarrow ?$

está en la diagonal
$m+n-1$.

Triángulo inferior hay:

$$\frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2} = L$$

lugares ocupados.

$m+n-1$ = impar $\Rightarrow$ lugar: $L+m$

$m+n-1$ = par $\Rightarrow$ lugar: $L+n$

(16) Veamos que $\mathbb{R}$ no es numerable:

$$\mathbb{R} \neq \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}.$$

Razonaremos por reducción al absurdo. Supondremos, por tanto, que es numerable. En ese caso, también lo será cualquier subconjunto suyo. En particular, podemos suponer que

$$]0,1] = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}.$$

Vamos a echar mano de la representación decimal de los números reales: para cada a_n podemos escribir:

$$a_1 = .a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \dots\dots a_{1n} \dots\dots$$

$$a_2 = .a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \dots\dots a_{2n} \dots\dots$$

$$a_3 = .a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \dots\dots a_{3n} \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_n = .a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3} \dots\dots a_{nn} \dots$$

Ahora, nuestro objetivo será construir un número $x \in]0,1]$ tal que $x \neq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$. (luego entraremos en contradicción, y habremos acabado con la tarea.)

Vamos a definir x por inducción ($\equiv$ método de recurrencia); $x = .x_1 x_2 x_3 \ldots x_n \ldots$

dado así:

$$x_1 := \begin{cases} a_{11}+1 \ \ldots & a_{11} \neq 9 \\ 5 \ \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{11} = 9 \end{cases}$$

$$x_2 := \begin{cases} a_{22}+1 \ \ldots & a_{22} \neq 9 \\ 5 \ \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{22} = 9 \end{cases}$$

$$x_3 := \begin{cases} a_{33}+1 \ \ldots & a_{33} \neq 9 \\ 5 \ \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{33} = 9 \end{cases}$$

. . . .

Supuesto construidos $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$:

$$x_{n+1} := \begin{cases} a_{n+1\,n+1}+1 \ \ldots & a_{n+1\,n+1} \neq 9 \\ 5 \ \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{n+1\,n+1} = 9 \end{cases}$$

¿Qué hemos logrado así?

Para cada $n \in \mathbb{N}$: $\quad x \neq a_n$

pues se diferencian en el n-ésimo dígito de su parte decimal.

(Observa que el "mecanismo" de definición tiene el objetivo de no asociar el $0 \notin]0,1]$ al $1 = 0.99\ldots9\ldots \in]0,1]$.)

En consecuencia, $]0,1]$ no es numerable, de donde se sigue que $\mathbb{R}$ tampoco puede serlo.

<u>Nota</u>: este método tan elegante e inteligente tiene nombre: está bautizado como método diagonal de Cantor.

(17)

$$n^5 - \underline{n} = \dot{30} \cdot \qquad \left(\underline{n = \dot{30} + n^5}\right)$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

$$n = 1 \Rightarrow 1^5 - 1 = 0 = 0 \cdot 30 = \dot{30}$$

$$\left(n = 2 \Rightarrow 32 - 2 = 30 = 30 \cdot 1 = \dot{30}\right)$$

$$(n+1)^5 - (n+1) = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1$$

$$\cancel{= (\dot{30} + n) + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n - n}$$

$$\cancel{= 5n^4 + 10n^3 +}$$

$$= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 4n$$

$$= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 4(n^5 - \dot{30})$$

$$= 5n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + \dot{30}$$

$$= 5n^2 (\underbrace{n^3 + n^2 + 2n + 2}_{(n+1)(n^2+2)})$$

$$= 5 \cdot \dot{2} \cdot \dot{3} = \dot{30}$$

(18) $P(n) := \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$

Comprobaremos que

$A := \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ es cierto}\} = \mathbb{N}.$

Para ello, razonaremos por inducción:

$1 \in A$, pues: $\dfrac{1}{2\sqrt{1}} \leq \dfrac{2\cdot 1-1}{2\cdot 1} < \dfrac{1}{\sqrt{2\cdot 1+1}}$

Probaremos la veracidad, ahora, de $P(n+1)$ supuesto que $n \in A$:

hipótesis de inducción

a) $\underbrace{\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}}_{\text{H.I.}}\dfrac{2n+1}{2n+2} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\dfrac{2n+1}{2n+2}$

de donde se sigue que para probar $n+1 \in A$ basta con comprobar que $\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}\dfrac{2n+1}{2n+2} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+3}}$

y esto son meros cálculos:

$$\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \iff \frac{2n+1}{2n+2} < \sqrt{\frac{2n+1}{2n+3}}$$

$$\iff \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 < \frac{2n+1}{2n+3} \iff$$

$$\Longleftrightarrow (2n+1)^2(2n+3) < (2n+1)(2n+2)^2$$

$$\Longleftrightarrow 4n^2+5n+3 < 4n^2+8n+4 \quad \underline{\text{ok}}$$

Luego deshaciendo los andados: $n+1 \in A$ (para el $<$)

b) $$\underbrace{\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}}_{\text{H.I.}}\,\frac{2n+1}{2n+2} \overset{\text{H.I.}}{\geq} \frac{1}{2\sqrt{n}}\,\frac{2n+1}{2n+2}$$

lo cual es ciertamente lo que necesitamos:

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}\,\frac{2n+1}{2n+2} \geq \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2n+1}{2n+2} \geq \sqrt{\frac{n}{n+1}} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{4n^2+4n+1}{4n^2+8n+4} \geq \frac{n}{n+1} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 4n^3+8n^2+5n+1 \geq 4n^3+8n^2+4n$$

$\Longrightarrow$ ok, $n+1 \in A$ (para el $\leq$).

En conclusión, de a) y b): $P(n)$ siempre es cierta. (Nota: el $<$ en el "$\leq$" se da a partir de $n>1$.)

(26)

Sea la matriz simétrica de orden $n \geq 2$ dada por

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Prueba que $\det(A_n) = n+1$.

Comprobamos para los primeros valores de n:

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-1 = 3 = 2+1$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8-4 = 4 = 3+1$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2|A_3| - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 - 0 =$$

$$= 2 \cdot 4 - 1(4-1) = 8-3 = 5 = 4+1$$

$$|A_5| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2|A_4| - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 1 \cdot |A_3| =$$

$$= 10 - 4 = 6 = 5+1$$

Podemos trabajar en la matriz A_{n+1} bajo la hipótesis de inducción fuerte: $\det A_n = n+1$ y $\det A_{n-1} = n$:

$$|A_{n+1}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & & & \\ 0 & & & A_n & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{vmatrix} = 2|A_n| - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2|A_n| - 1 \cdot 1 \cdot |A_{n-1}| + 0 = 2(n+1) - n =$$

$$= 2n + 2 - n = n + 2 = (n+1)+1$$

(27)

¿Siempre en la inducción es a) $1 \in A$ y b) si $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$?

Analizamos $n! - 3^n > 0$. $(\equiv P(n))$

$n = 1 \Rightarrow 1 - 3 = -2 < 0$, falso $P(1)$

$n = 2 \Rightarrow 2 - 9 = -7 < 0$, ídem.

$n = 3 \Rightarrow 6 - 27 < 0$, $P(3)$, falso.

$n = 4 \Rightarrow 24 - 81 < 0$, $P(4)$ también.

$n = 5 \Rightarrow 120 - 243 < 0$, también falso $P(5)$

$n = 6 \Rightarrow 720 - 729 < 0$, ¡tampoco $P(6)$ vale!

$n = 7 \Rightarrow 5040 - 2187 > 0$, ¡Sí, $P(7)$ es cierto!

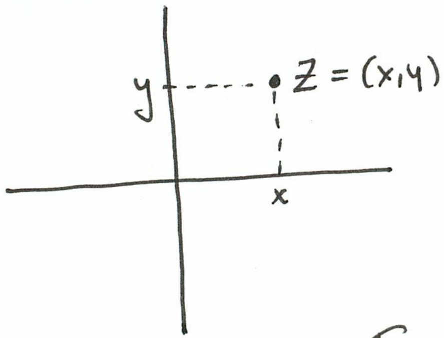
Supongamos que $P(n)$ es cierto para algún $n \geq 7$. ¿Será $P(n+1)$ cierto?

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \overset{\text{H.I.}}{>} (n+1)3^n = n3^n + 3^n > 3^{n+1}$$

$$\Longleftrightarrow n3^n > 3^{n+1} - 3^n = 3^n(3-1) = 2 \cdot 3^n, \text{ ok}$$

luego $n! - 3^n > 0 \quad , \forall n \geq 7$

El llamado Teorema Fundamental del Álgebra nos informa que "todo polinomio de grado n con coeficientes reales tiene n raíces complejas, distintas o confundidas". Es importante, por tanto, conocer algunos aspectos del llamado "cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos":



$\mathrm{Re}\, z$ = real de $z = x$

$\mathrm{Im}\, z$ = imaginaria de $z = y$

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}\times\mathbb{R} \cong \mathbb{R}\times i\mathbb{R}$$

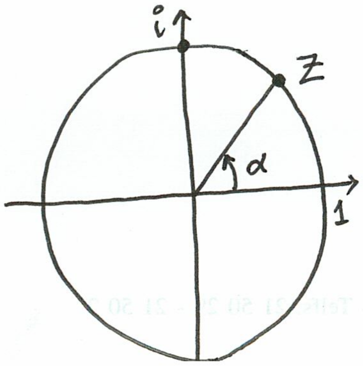
$$z = (x,y) = x+iy$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = (1,0) \\ i = (0,1) \end{array} \right\}$$

Operaciones en $\mathbb{C}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} z+w = (\mathrm{Re}\, z+\mathrm{Re}\, w) + i\,(\mathrm{Im}\, z+\mathrm{Im}\, w) \\ z\cdot w = (\mathrm{Re}\, z\,\mathrm{Re}\, w - \mathrm{Im}\, z\,\mathrm{Im}\, w) + \\ \qquad\quad + i\,(\mathrm{Re}\, z\,\mathrm{Im}\, w + \mathrm{Im}\, z\,\mathrm{Re}\, w) \end{array} \right.$$

de donde $\underline{\underline{i^2}} = i\cdot i = (0,1)(0,1) = (-1,0) \equiv \underline{\underline{-1}}$



Si $(\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2 = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{z = \cos\alpha + i\sin\alpha \equiv e^{i\alpha}}$$

de donde: $\boxed{e^{i\pi}+1=0}$

En general: $$|z| := \sqrt{(\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\, z}{\mathrm{Re}\, z}\right) \in [0, 2\pi[$$

$$\Rightarrow \quad \left\{ \boxed{z = |z| e^{i\theta}} \right. \equiv \text{forma polar}$$

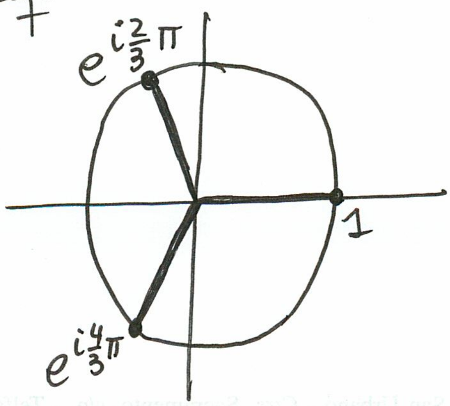
que es muy "útil" para visualizar el producto en $\mathbb{C}$; resultan ser giros:

$$z w = |z||w|\, e^{i(\theta_z + \theta_w)}$$

y para obtener las raíces (n-ésimas de la unidad, en particular) de un complejo:

$$z^{1/n} = \{ w \in \mathbb{C} \mid w^n = z \} \Rightarrow$$

por ejemplo: $\sqrt[3]{1} = \{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\}$, que resultan estar equidistribuidas sobre la circunferencia unidad:



(19) Resuelve $1+x+x^2+x^3+x^4=0$

Opción A Como $x \neq 0$, podemos dividir por x^2:

$$0=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1+x+x^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1$$

$\Rightarrow$ con $u=x+\frac{1}{x}$: $\quad u^2+u-1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad u=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$ para resolverlo en x:

$x+\frac{1}{x}=u \Rightarrow \quad x^2-ux+1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad x=\dfrac{u\pm\sqrt{u^2-4}}{2} \Rightarrow$ 4 soluciones:

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+i\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \qquad x_2=\overline{x_1}$$

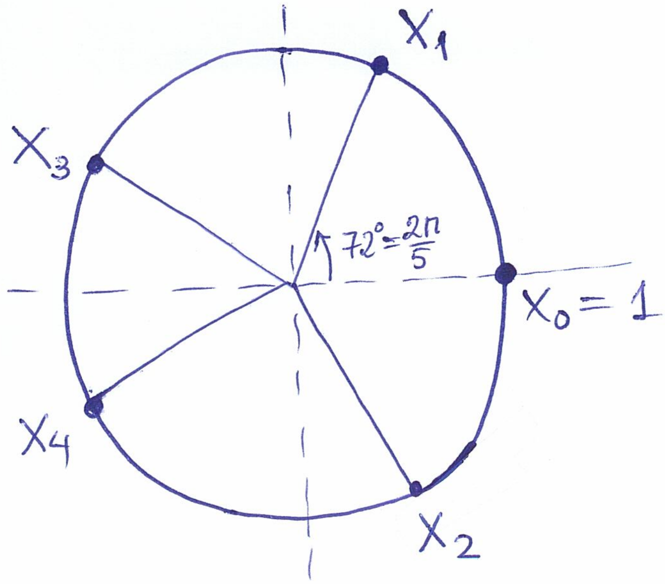
$$x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}-i\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$x_3=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}+i\,\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \qquad x_4=\overline{x_3}$$

$$x_4=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}-i\,\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

(Recuerda que $\overline{z}=\mathrm{Re}\,z-i\,\mathrm{Im}\,z$.)

<u>Opción B</u>: $1+x+x^2+x^3+x^4 = \frac{1-x^5}{1-x}$, y como las cinco raíces de la unidad están en la circunferencia unidad equidistribuidas, siendo una de ellas la propia unidad:



$$X_1 = e^{i\frac{2}{5}\pi} = \cos\frac{2}{5}\pi + i\sin\frac{2}{5}\pi$$

$$X_2 = \overline{X_1}$$

$$X_3 = e^{i\frac{4}{5}\pi} = \cos\frac{4}{5}\pi + i\sin\frac{4}{5}\pi$$

$$X_4 = \overline{X_3}$$

(21) 120 nidos y 121 palomas $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ en un nido hay, al menos, dos palomas

(PRINCIPIO DEL PALOMAR)

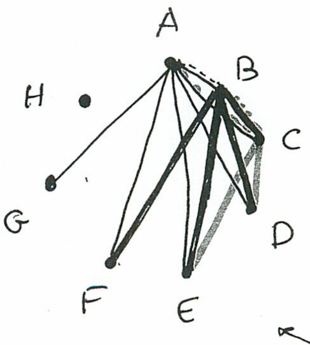
$$\nexists\ f : S(m) \hookrightarrow S(n)$$

inyectiva, con $m > n$

(Siempre habrá algún nido con, al menos, dos palomas.)

24

López Pérez es la familia que organiza una fiesta para otras tres parejas. Al llegar hay saludos (nadie saludará a su pareja, ni a sí mismo). Al final de la fiesta, López preguntó a cada uno cuántos saludos había realizado... y oh, casualidad, ¡nadie le dijo haber saludado al mismo número de personas! ¿Podrías decir a cuántas personas saludó Pérez al ~~llegar~~ comienzo de la fiesta?



Claramente López recibió ~~siete~~ respuestas: 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6.
Pongamos que fue A quien chocó 6 manos.
El diagrama nos dice entonces que H y A son pareja (pues A saludó a todos los demás).

Pongamos que fue B quien saludó a 5: entonces G debe ser su pareja.

Podemos suponer que fue C quien chocó 4 manos; y será que F es su pareja. En consecuencia, también D y E lo serán. ¿Pero cuál de las cuatro parejas es López-Pérez?

Ocurre que D y E han saludado al mismo nº de personas... y a López no le llegó esa confesión cuando preguntó; luego López es D o E. En consecuencia, Pérez saludó a tres (3) personas al comienzo de la fiesta.

Factoriales, combinatorios y los triángulos de Tartaglia y Pascal.

Factorial de un número entero no negativo:

$$0! = 1 \quad , \quad 1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 3 \cdot 2, \ldots$$

en general:
$$0! = 1$$
$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \quad , \quad \forall n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$$

Número combinatorio "m sobre n" $(m \geq n \geq 0)$:

o número de subconjuntos con n elementos que tiene un conjunto con m:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

Observaciones (sencillas):

$$\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1$$

$$\binom{m}{1} = \binom{m}{m-1} = m$$

y en general: $$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$$

y $$\binom{m}{n-1} + \binom{m}{n} = \binom{m+1}{n}$$

Nicolo Fontana (a quien llamaban Tartaglia, por lo que le costaba "arrancar" a hablar...) y Blas Pascal, popularizaron los siguientes triángulos (que, a la postre, son el mismo):

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Son de especial interés cuando se trata de obtener los coeficientes del desarrollo $(a+b)^n$ en potencias de a y de b.

Concretamente:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} = 2^m$$

es el nº de subconjuntos que tiene un conjunto con m elementos, pues

$\binom{m}{0}$ = nº de subconjuntos de 0 elementos: 1, a saber, el conjunto vacío.

$\binom{m}{1}$ = los simpletes del conjunto, es decir, los que tienen un único elemento; a saber: m.

Y así, sucesivamente.

Observa esta ~~esta~~ propiedad:

$$\binom{m}{n} = \frac{m}{n}\binom{m-1}{n-1} \quad (\text{para } n \geq 1)$$

(35) Comprueba la fórmula del binomio:

$$a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

La demostración se hace por inducción: se considerarán a y b en $\mathbb{R}$, fijos pero arbitrarios, y se comprueba la fórmula para $n \in \mathbb{N}$:

$n=1$, evidente: $(a+b)^1 = a+b = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0$

Para probar que $n+1$ es caso cierto, supuesto que lo sea el caso n, es imprescindible tener presente que

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Así:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n \underset{\text{H.I.}}{=}$$

$$= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1}$$

$$= \binom{n}{0}ab^n + \binom{n}{1}a^2b^{n-1} + \binom{n}{2}a^3b^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1}a^nb + \binom{n}{n}a^{n+1} +$$

$$+ \binom{n}{0}b^{n+1} + \binom{n}{1}ab^n + \binom{n}{2}a^2b^{n-1} + \binom{n}{3}a^3b^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1}a^{n-1}b^2 + \binom{n}{n}a$$

$$= \binom{n}{0}b^{n+1} + \left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right]ab^n + \left[\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right]a^2b^{n-1} + \left[\binom{n}{2}+\binom{n}{3}\right]a^3b^{n-2} + \dots$$

$$\dots + \left[\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right]a^nb + \binom{n}{n}a^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0}b^{n+1} + \binom{n+1}{1}ab^n + \binom{n+1}{2}a^2b^{n-1} + \dots$$

$$\dots + \binom{n+1}{n}a^nb + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^kb^{n+1-}$$

De esta fórmula se desprenden igualdades muy importantes:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \qquad (x=1)$$

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \qquad (x=-1)$$

Y gracias a diversas manipulaciones:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k = n\, 2^{n-1}$

Derivando en cada miembro

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)$

Antiderivando en cada miembro

Pero probaremos a) y b) usando que

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

(47) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\dots = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ es divergente.

Método A Por reducción al absurdo, supongamos que converge:

$$S = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\dots =$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\right)+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\dots >$$

$$> \tfrac{1}{2}+\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\right)+\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\right)+\left(\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{6}\right)+\dots$$

$$= \tfrac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots = \tfrac{1}{2}+S \Rightarrow S \geq \tfrac{1}{2}+S$$

lo cual es absurdo manifiestamente.

Método B Vamos a minorar inferiormente las sumas parciales en $\sum 1/n$ mediante una sucesión $x_n \to +\infty$:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{16}+\dots$$

$$\dots+\frac{1}{2^n+1}+\dots+\frac{1}{2^{n+1}} \geq$$

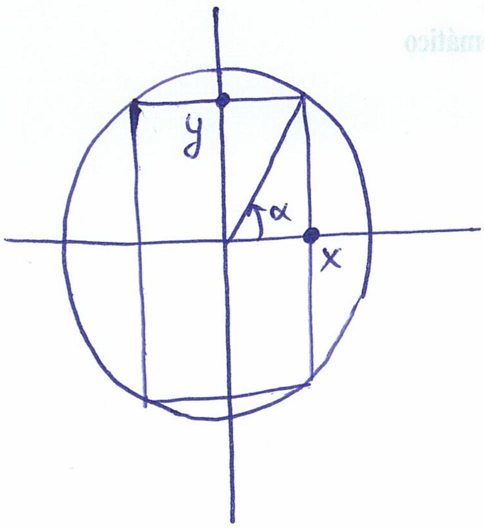
$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\overset{8)}{\dots}+\frac{1}{16}\right)+\dots$$

$$\dots+\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\overset{2^n)}{\dots}+\frac{1}{2^{n+1}}\right) =$$

$$= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\overset{n)}{\dots}+\frac{1}{2} = 1+\frac{n}{2} \to +\infty$$

luego $\sum^{\infty} 1/n = +\infty$.

(63) Prueba que de entre todos los rectángulos inscritos en una circunferencia dada, el cuadrado es el de área máxima.



Varias reducciones:

- por simetría, basta estudiar un cuadrante: xy, máximo
- podemos restringirnos a la circunferencia unidad:

$$\left.\begin{array}{l} x = \cos\alpha \\ y = \sin\alpha \end{array}\right\}$$

$\Longrightarrow$

$$xy = \cos\alpha \sin\alpha = \\ = 2^{-1} \sin 2\alpha \leq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow$$

como $|\sin\beta| \leq 1$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$,

para $2\alpha = \pi/2$ es el máximo $\Rightarrow$ $\boxed{\alpha = \pi/4}$

$\Longrightarrow$ $\cos\alpha = \sin\alpha$ $\Rightarrow$ $\boxed{x = y}$