RELACIÓN QUINTA DE EJERCICIOS
DESIGUALDADES NUMÉRICAS Y ECUACIONES FUNCIONALES

1. Dados $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ prueba que

$$x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n \geq n x_1 x_2 \cdots x_n \quad \text{y} \quad \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} \geq 1.$$

2. Halla todas las ternas (x, y, z) de números reales positivos que satisfagan las ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x\sqrt{x+1} - y\,(y+1) = 1 \\ 2y\sqrt{y+1} - z\,(z+1) = 1 \\ 2z\sqrt{z+1} - x\,(x+1) = 1 \end{array} \right. .$$

3. ¿Qué relación de orden hay entre los números $\sqrt[3]{60}$ y $2 + \sqrt[3]{7}$?

4. Si los números a, b, c se corresponden con las longitudes de los lados de algún triángulo, prueba que:

$$\left| \frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} \right| < 1/16.$$

5. Si los números a, b, c se corresponden con las longitudes de los lados de algún triángulo, prueba que:

$$3\,(ab + bc + ca) \leq (a+b+c)^2 \leq 4\,(ab + bc + ca)\,.$$

6. Prueba que si $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, con $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, entonces

$$-1/2 \leq ab + bc + ca \leq 1.$$

7. Para cualesquiera reales positivos a, b, c, se tiene

$$8abc \leq (a+b)\,(b+c)\,(c+a)\,.$$

8. Para cualesquiera reales positivos a, b, c, se tiene

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 8ab}} \geq 1.$$

9. Para cualesquiera reales positivos a, b, c, se tiene

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq 3/2.$$

10. Para cualesquiera reales positivos a, b, c, tales que $abc = 1$,se tiene

$$\frac{1}{a^2\,(b+c)} + \frac{1}{b^2\,(c+a)} + \frac{1}{c^2\,(a+b)} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right).$$

11. Para cualesquiera reales positivos a, b, c, tales que $abc = 1$,se tiene

$$\frac{1}{a^3\left(b+c\right)} + \frac{1}{b^3\left(c+a\right)} + \frac{1}{c^3\left(a+b\right)} \geq 3/2.$$

12. Para cualesquiera reales positivos a, b, c, tales que $a + b + c = 1$, se tiene

$$0 \leq bc + ca + ab - 2abc \leq 7/27$$

13. Para cualesquiera reales positivos a, b, se tiene

$$a + b \geq \sqrt{ab} + \sqrt{a^2 + b^2}.$$

14. Si eliges dos puntos cualesquiera del intervalo abierto $]0, 1[$, ¿cuál es la probabilidad de que uno sea menor que el cuadrado del otro?

15. Prueba que para cualesquiera reales positivos a, b y natural n, se tiene la relación

$$\left(n-1\right)a^n + b^n \geq na^{n-1}b.$$

16. Sea $a > 1$ y sean funciones $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$f\left(x\right) + g\left(x\right) + h\left(y\right) \geq 0$$

para todo real x. Prueba que la ecuación

$$a^{f(x)} + a^{g(x)} + a^{h(x)} = 3$$

tiene soluciones si y sólo si las funciones f, g, h tienen ceros comunes. Como aplicación, resuelve la ecuación

$$5^{1+\cos\pi x} + 2^{x^2-1} + 2^{2(1-|x|)} = 3.$$

17. Calcula el siguiente límite ayudándote del concepto de integral:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{k+1}} + \frac{2^k}{n^{k+1}} + \frac{3^k}{n^{k+1}} + \cdots + \frac{\left(n-1\right)^k}{n^{k+1}} + \frac{n^k}{n^{k+1}}\right).$$

18. Sean $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, y definamos para cada real positivo x la función

$$f\left(x\right) := \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x + a_k}.$$

¿Cuánto suman las longitudes de los intervalos (disjuntos dos a dos) de los puntos x donde $f\left(x\right) > 1$?

19. Calcula el conjunto de los números reales x tales que $\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geq 5/4$ y que se puede escribir como la unión disjunta de un número finito de intervalos cuya suma de longitudes mide 1988.

20. Obténgase la derivada n-ésima de la función $f(x) = 1/\left(1-x^2\right)$ en aquellos puntos donde tenga sentido.

21. Prueba que si p es un polinomio de grado 3 con coeficientes racionales y tangente al eje de abcisas, entonces sus tres raíces son racionales.

22. Prueba que no existe ninguna función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$,
$$f\left(x^2 + y\right) = f(x) + y^2.$$

23. Se pide que construyas una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$,
$$f\left[x^2 + f(y)\right] = y + [f(x)]^2 .$$

24. Se pide que encuentres funciones del tipo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tales que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$,
$$f[xf(y)] = yf(x) .$$

25. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tales que
$$f(n) + f(f(n)) + f(f(f(n))) = 3n$$
para cada natural n.

26. Se pide que encuentres funciones f estrictamente crecientes de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ tales que
$$f[yf(x)] = x^2 f(xy)$$
para cualesquiera naturales x, y.

27. Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la sucesión de enteros dada, para $n \in \mathbb{N}$, por
$$\begin{aligned} f(1) &= 1, f(3) = 3, f(2n) = n, \\ f(4n+1) &= 2f(2n+1) - f(n), \\ f(4n+3) &= 3f(2n+1) - 2f(n). \end{aligned}$$
Se pide encontrar el conjunto $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 1988, f(n) = n\}$.

28. Encuentra todos los polinomios P de coeficientes reales tales que
$$P(P(x)) = [P(x)]^{2007} .$$

29. ¿Existe algún polinomio p para el que se verifique que
$$xp(x-1) = (x+1)p(x)$$
para cualquier valor del número real x?

30. Encuentra todas las funciones f de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ tales que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{Z}$ se tenga
$$f[x + f(y)] = f(x) - y.$$

31. Se pide encontrar una funcón f tal que

$$[f(x)]^2 f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 64x$$

para $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

32. Se pide que encuentres funciones $f :]-1, +\infty[\longrightarrow]-1, +\infty[$ tales que satisfagan las dos condiciones siguientes: (1) $f[x + f(y) + xf(y)] = y + f(x) + yf(x)$, y (2) $f(x)/x$ es estrictamente creciente en los intervalos $]-1, 0[$ y $]0, +\infty[$.

33. Se pide que construyas una función $f : \mathbb{Q}^+ \longrightarrow \mathbb{Q}^+$ tal que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{Q}^+$ se tenga que $f[xf(y)] = f(x)/y$.

34. De una función creciente $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ sabemos que (1) $f(0) = 0$, (2) $f(x/3) = f(x)/2$ y (3) $f(1-x) = 1 - f(x)$. Se te pide que calcules $f(18/1991)$.

35. Se pide que calcules la imagen $f(\mathbb{N})$ de una sucesión f dada por (1) $f(1) = 1$, (2) $f(2n+1) = 1 + f(2n)$ y (3) $f(2n) = 3f(n)$, para cada natural n.

36. Considera la familia de todas las sucesiones de números naturales $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tales que

$$f\left[t^2 f(s)\right] = s[f(t)]^2$$

para cualesquiera pareja de naturales $s.t$. Calcula el mínimo de los posibles valores de $f(1998)$.