Capítulo 3
Soluciones de ejercicios seleccionados

Sección 3.1.4

1. $\operatorname{Dom} a = [-1, 1]$. $\operatorname{Dom} b = \mathbb{R}$. $\operatorname{Dom} c = (-\infty, 4)$. $\operatorname{Dom} d = (-1, \infty)$.
$\operatorname{Dom} e = \mathbb{R} - (-1, 3]$ y $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

2. $(f+g)(x) = \begin{cases} 5x-4 & x < 1, \\ 2x+5 & 1 \le x \le 3, \\ 7-2x^2 & x > 3. \end{cases}$ $(f \cdot g)(x) = \begin{cases} 2(x-1)(3x-2) & x < 1, \\ 14(x-1) & 1 \le x \le 3, \\ -14x^2 & x > 3. \end{cases}$

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 6(x-1) & x < 1, \\ -98 & x > 1. \end{cases}$$

4. (a) $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{4}$ y $\operatorname{Dom} f^{-1} = \mathbb{R}$.
(b) $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{4x - x^2 - 3}$ y $\operatorname{Dom} g^{-1} = [2, \infty)$.

5. f no es inyectiva en $(-\infty, \infty)$ pero sí lo es en $[0, \infty)$ donde $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

6. Estrictamente creciente en $\left[\dfrac{-\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ y estrictamente decreciente en $\left[\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$ con $k \in \mathbb{Z}$.

8. A los $2 + \sqrt{10}$ días de aplicar el pesticida.

Sección 3.2.4

1. El conjunto A es la superficie esférica centrada en $(0, 0, 0)$ y radio 1. El conjunto B es el cilindro de radio 1 cuyo eje de rotación es el eje de y. El conjunto D es el cubo cuyas caras se sitúan en los planos $x = -1$, $x = 1$, $y = -1$, $y = 1$, $z = -1$ y $z = 1$.

2. $\operatorname{Dom} a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0,\ y \neq 0\}$, es decir, el dominio es el plano $\mathbb{R}^2$ menos los ejes de coordenadas. $\operatorname{Dom} b = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$, o sea, el semiplano superior (incluido el eje x). $\operatorname{Dom} c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 4\}$, es decir, se trata de la región compuesta por los cuadrantes segundo y cuarto, la parte del primer cuadrante que queda por debajo de la gráfica de la función $y = 4/x$ y la parte del tercer cuadrante que queda por encima de la gráfica de dicha función, incluidos los ejes coordenados.

5. Las superficies de nivel k de la función f son $x^2 + y^2 + z^2 = 1 - k^2$, es decir, superficies esféricas centradas en $(0, 0, 0)$ y radio $\sqrt{1 - k^2}$. Observe que k debe pertenecer al intervalo $[0, 1]$; y que si $k = 1$, entonces la superficie es degenerada (se reduce al origen).

Sección 3.3

1. (a) $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{0\}$. (b) $\mathrm{Dom}\, g = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. (c) $\mathrm{Dom}\, h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, o sea, el semiplano derecho abierto. (d) $\mathrm{Dom}\, k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > x - 3, z \neq 0\}$, es decir, la parte de $\mathbb{R}^3$ que queda encima de la gráfica del plano $z - x + 3 = 0$ sin incluir los puntos del plano xy.

3. (a) $(g \circ f)(t) = 0$. (b) $(g \circ f)(r, \varphi) = r^2$.

Sección 3.4.4

1. (a) f es continua en $\mathbb{R} - \{1, 2\}$ y en los puntos 1 y 2 presenta una discontinuidad esencial. (b) f es continua en $\mathbb{R} - (-1, 1)$. (c) f es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$ y en el punto 2 presenta una discontinuidad evitable. En los casos (d), (e) y (f) la función f es continua en $\mathbb{R}$.

2. $m = 5$ y $n = 0$.

3. Observe primero que ambas composiciones tienen sentido, ya que $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Dom}\, g$ e $\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Dom}\, f$. Por otra parte, $f \circ g$ y $g \circ f$ son continuas en $[0, 2]$ por ser composición de funciones continuas.

4. $a = 1$ y $b = 2$.

7. (a) 0. (b) 0. (c) $\sqrt{3}$. (d) a^2.

Sección 3.5

1. Los límites pedidos son, respectivamente: ∞, ∞, $1/2$ e ∞.

2. Para f basta tomar las trayectorias $x = 0$ e $y = 0$, para g las trayectorias $y = x$ e $y = 2x$ (o, en general, $y = mx$) y para h las trayectorias $x = 0$ e $y = x$.

Sección 3.7.4

1. Sí, basta aplicar el teorema de Bolzano a g en el intervalo $[1, 9]$.

3. La función f sí es continua en $(2, 4]$, sin embargo, no está acotada en dicho intervalo y posee un mínimo absoluto en $x = 4$ cuyo valor es $\frac{1}{2}$.

4. Basta aplicar el teorema de Bolzano a $f(x) = x^3 + xg(x) + 2$ en el intervalo $[-2, 0]$.

5. 15 veces.

Sección 3.8

1. $\mathrm{Dom}\, a = \mathbb{R}$. $\mathrm{Dom}\, b = \mathbb{R} - \{0\}$. $\mathrm{Dom}\, c = [e^2, \infty)$. $\mathrm{Dom}\, d = [-1, 1]$. $\mathrm{Dom}\, e = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\,\right]$. $\mathrm{Dom}\, f = (0, \infty) - \{1, 2\}$.

2. $\mathrm{Im}\, a = (2, \infty)$. $\mathrm{Im}\, b = \mathbb{R}$. $\mathrm{Im}\, c = [3, \infty)$. $\mathrm{Im}\, d = [-1, \infty)$.

3. (a) Sí. (b) Sí. (c) Sí se puede definir $f \circ g$ pero no $g \circ f$.

4. (a) Sí, $a^{-1}(x) = 4 - \dfrac{9}{(x-2)^2}, x \in (2, \infty)$. (b) Sí, $b^{-1}(x) = \dfrac{x+7}{3}, x \in \mathbb{R}$. (c) No.
(d) Sí, $d^{-1}(x) = \sqrt{1 - \dfrac{1}{x+2}}, x \in [-1, \infty)$.

5. La vida media del uranio es $\dfrac{\ln 2}{k}$.

6. $\operatorname{Dom} a = \mathbb{R}^3$, que es un conjunto abierto, cerrado, conexo y convexo. $\operatorname{Dom} b = B[(0,0), 1]$, es decir, el círculo de centro $(0,0)$ y radio 1, que es un conjunto cerrado, conexo y convexo. $\operatorname{Dom} c = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0,\ y > 0\}$, es decir, los puntos de $\mathbb{R}^3$ que se proyectan verticalmente sobre el primer cuadrante abierto del plano xy; este dominio es abierto, conexo y convexo. $\operatorname{Dom} d = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq xy \leq 2\}$, es decir, se trata de la región compuesta por la parte del primer cuadrante que queda por debajo de la gráfica de la función $y = 2/x$ y la parte del tercer cuadrante que queda por encima de la gráfica de dicha función, incluyendo los puntos de la gráfica y los ejes coordenados; es un dominio cerrado y conexo, pero no convexo. $\operatorname{Dom} e = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y \neq 0\}$, o sea, el semiplano derecho (a partir del eje y sin incluir a éste) excepto el semieje positivo x, que es un dominio es abierto y disconexo. $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}^3 - \{(x,y,z) : x + y - z = 0\}$, es decir, cualquier punto de $\mathbb{R}^3$ que no pertenezca al plano de ecuación $x+y-z=0$; es un dominio abierto y disconexo. $\operatorname{Dom} g = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \neq 0,\ z \neq 0\}$, o sea, los puntos de $\mathbb{R}^3$ que no están en los planos coordenados xz y xy; es un dominio abierto y disconexo. $\operatorname{Dom} h = \mathbb{R}^3 - B[(0,0,0), 1]$, es decir, el conjunto complementario de la bola cerrada centrada en $(0,0,0)$ y radio 1, que es un dominio abierto y conexo, pero no convexo.

7. $\operatorname{Im} a = (-\infty, 1)$. $\operatorname{Im} b = \mathbb{R} - \{0\}$. $\operatorname{Im} c = [-1, \infty)$. $\operatorname{Im} d = [0, 1]$.

8. Las curvas de nivel de f son todas las rectas de pendiente $-2/3$. Las de g son todas las parábolas cuya ecuación es de la forma $y = x^2/5 + c$, con $c \in \mathbb{R}$. Las de h son todas las circunferencias con centro en el origen (incluida la curva degenerada que se reduce a dicho punto). Las de k son todas las hipérbolas equiláteras cuya ecuación es de la forma $y = c/x$, con $c \in \mathbb{R}$. Las de l son todas las circunferencias con centro en el punto $(1, -2)$ (incluida la curva degenerada que se reduce a dicho punto). Las de m son todas las elipses cuyos ejes se sitúan sobre los ejes coordenados de manera que el eje vertical es $\sqrt{2}$ veces mayor que el eje horizontal (incluida la elipse degenerada que se reduce al origen de coordenadas).

9. Las superficies de nivel de la función a son todos los planos cuya ecuación es de la forma $2x + 3y + 5z = k$, con $k \in \mathbb{R}$, es decir, todos los planos perpendiculares al vector $n = (2,3,5)$. Las de b son las superficies de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = k$, con $k \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, es decir, las superficies esféricas centradas en $(0,0,0)$ y de radio cualquiera $\sqrt{k}$ (incluida la superficie degenerada que se reduce al origen). Las de c son las superficies de ecuación $x^2 + y^2 = k$, con $k \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, es decir, las superficies cilíndricas (de longitud infinita) cuyo eje de revolución es el eje z y de radio cualquiera $\sqrt{k}$ (incluida la superficie degenerada que se reduce al eje z). Las de d son las superficies de ecuación $xz = k$, con $k \in \mathbb{R}$; si $k = 0$, es una superficie formada por dos planos coordenados —el xy y el yz—; si $k \neq 0$ es la superficie formada por todos los puntos que se proyectan perpendicularmente sobre el plano xz en la hipérbola de ecuación $z = k/x$. Las de e son las superficies de ecuación $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = k$, con $k \in \mathbb{R}^+ \cup 0$, es decir, las superficies esféricas centradas en $(1, -2, 0)$ y de radio cualquiera $\sqrt{k}$ (incluida la superficie degenerada que se reduce al dicho punto). Las de f son las superficies de ecuación $(x-1)^2 + z^2 = k$, con $k \in \mathbb{R}^+ \cup 0$, es decir, las superficies cilíndricas (de longitud infinita) de radio cualquiera $\sqrt{k}$ cuyo eje de revolución pasa por el punto $(1, 0, 0)$ y es paralelo al eje y, es decir, es el formado por los puntos $(1, y, 0)$, para todo $y \in \mathbb{R}$.

10. $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. $\operatorname{Dom} g = \mathbb{R}^+ - \{1\}$. $\operatorname{Dom} h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y > 0\}$, es decir, el primer cuadrante excepto el semieje positivo x. $\operatorname{Dom} j = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > y, z \neq 0\}$. Todas las funciones son continuas en su dominio.

11. La función f es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$ y en el punto 1 presenta una discontinuidad de salto; g es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ y en el punto 0 presenta una discontinuidad de salto; h es continua en $\mathbb{R}$; i es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ y en el punto 0 presenta una discontinuidad de salto; j es continua en $\mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$, en el punto 0 presenta una discontinuidad de salto, en el punto 1 presenta una discontinuidad esencial y en el punto 2 presenta una discontinuidad evitable. h es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ y en el punto 0 presenta una discontinuidad de salto.

13. Si llamamos (a), (b), (c), etc. a los distintos límites, empezando por los de la primera línea y de izquierda a derecha, los resultados son: (a) $1/2$. (b) No existe, pues es 0 si $x \to 0^-$ y es $3/2$ si $x \to 0^+$. (c) $3/2$ (compruebe que si se calculase el límite cuando $x \to -\infty$, el resultado sería $-3/2$). (d) En ambos casos el límite es $6/5$. (e) No existe en ninguno de los dos puntos: en ambos casos los límites por la izquierda y por la derecha son 0 e ∞, respectivamente. (f) No existen: el límite es ∞ cuando $x \to \infty$, y es $-\infty$ cuando $x \to -\infty$. (g) No existen: el límite es ∞ cuando $x \to \infty$, y es $-\infty$ cuando $x \to -\infty$. (h) $1/2$. (i) 1. (j) No existen: el límite es ∞ cuando $x \to \infty$, y es $-\infty$ cuando $x \to -\infty$. (k) En ambos casos el límite es 0. (l) No existe: el límite es ∞. (m) En ambos casos el límite es $-5/7$. (n) 12. (ñ) 6. (o) No existen: el límite es ∞ cuando $x \to \infty$, y es $-\infty$ cuando $x \to -\infty$. (p) 0. (q) No existen: en ambos casos el límite es ∞.

14. (a) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, $\operatorname{Dom} g = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$, $\operatorname{Dom} h = \mathbb{R} - \{0\}$. (b) Las funciones f, g y h son continuas en sus respectivos dominios; la función f presenta una discontinuidad esencial (de salto infinito) en el punto $x = -1$, y una discontinuidad evitable en el punto $x = 1$; la función g presenta una discontinuidad esencial (de salto infinito) en el punto $x = -3$, y una discontinuidad evitable en el punto $x = 3$; la función h presenta una discontinuidad esencial (de salto infinito) en el punto $x = 0$. (c) Si $x \to \infty$, entonces f tiende a 1, g tiende a ∞ y h tiende a 0; si $x \to -\infty$, entonces f tiende a 1, g tiende a $-\infty$ y h tiende a 0.

15. (a) $\dfrac{a-b}{c-d}$. (b) a. (c) $\dfrac{1}{2}$. (d) 0. (e) 1. (f) 1.

16. $b + 2a = 2$.

17. No es posible, pues el límite no existe porque f oscila (tomando valores comprendidos entre -1 y 1) cuando $x \to 0$.

18. Habrá que definir $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

19. Para a basta tomar las trayectorias $x = 1$ e $y = 1$, para b las trayectorias $x = -2$ e $y = 0$, para c las trayectorias $y = 0$ e $y = x - 1$ (o, en general, $y = m(x-1)$) y para d las trayectorias $y = 0$ e $y = x$.

20. No existe el límite de $a(x, y)$: es ∞. No existe el límite de $b(x, y)$: es ∞. El límite de $c(x, y)$ es $1/3$. No existe el límite de $d(x, y)$: es ∞. No existe el límite de $e(x, y, z)$ en los puntos indicados.

21. No existe ninguno de ellos. Para probar esto basta tomar, respectivamente, las trayectorias siguientes: (a) $y = x$ e $y = 2x$; (b) $y = 0$ e $y = x - 1$ (o, en general, $y = m(x-1)$); (c) $y = 2$ e $y = x + 2$; (d) $y = x$ e $y = 2x$ (o, en general, $y = mx, m > 0$).

22. Basta aplicar el teorema de Bolzano a $f(x) = \frac{x+2}{x+1} + \frac{x-1}{x-3}$, por ejemplo en el intervalo $[0, 5/2]$.

23. Basta aplicar el teorema de Bolzano a $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3}$, por ejemplo en los intervalos $[6/5, 7/5]$ y $[12/5, 13/5]$.

24. Basta aplicar el teorema de Bolzano a $f(x) = x^{3422} + \frac{524}{17 + 3x^2 + \cos^2 x} - 420$, por ejemplo en el intervalo $[1, 2]$.

27. $[1, 2]$.

29. $-0{,}59375$ (aplicando el método de bisección 5 veces a partir del intervalo $[-1, 0]$).

30. 1,3642578125 (aplicando el método de bisección 10 veces a partir del intervalo $[1, 2]$).