Capítulo 2
Soluciones de ejercicios seleccionados

Sección 2.1.4

1. (a) Sí. (b) No. (c) Sí.

2. (a) $x = 0$ si $\alpha \neq 0$, pero si $\alpha = 0$ todo número real es solución de la ecuación. (b) $(x, y) = (\lambda - 7/3, \lambda)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Si $k \neq 6$ las soluciones del sistema son la intersección de dos rectas paralelas (sistema incompatible); si $k = 6$ las soluciones del sistema son la intersección de dos rectas coincidentes (sistema compatible indeterminado).

Sección 2.2.5

1. $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -11/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 23/8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/8 \end{pmatrix}.$

3. 2º sistema: $(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0)$. 4º sistema: $(x, y, z, w) = (-y - 9, y, 7, 0)$. 5º sistema: $(x, y, z, w) = (1, 0, 2, 0)$.

4. 1er sistema: si $a \neq \pm 4$, $(x, y, z) = \left(\frac{8}{7} - \frac{1}{a+4}, \frac{10}{7} + \frac{2}{a+4}, \frac{1}{a+4}\right)$; si $a = 4$, $(x, y, z) = \left(\frac{8}{7} - z, \frac{10}{7} + 2z, z\right)$; si $a = -4$, es incompatible. 2º sistema: si $a \neq 2$ y $a \neq 4$, $(x, y) = (0, 0)$; si $a = 2$, $(x, y) = (y, y)$; si $a = 4$, $(x, y) = (-y, y)$.

5. Deben cumplir que $c = 5a - 2b$.

6. Es compatible determinado con solución $(x, y, z) = (-1, 2, 4)$

Sección 2.3.5

2. (a) Falsa, salvo en el caso de que $AB = BA$. (b) Falsa, salvo en el caso de que $p = n$.

4. Son todas las matrices de la forma $B = \begin{pmatrix} c + d & 2c/3 \\ c & d \end{pmatrix}$, con $c, d \in \mathbb{R}$.

Sección 2.4.4

3. $A^{-1} = \dfrac{1}{120} \begin{pmatrix} 63 & 84 & -24 & -24 \\ -48 & -24 & 24 & 24 \\ 68 & 64 & -64 & -24 \\ 15 & -60 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \dfrac{1}{423} \begin{pmatrix} -8 & 15 & 93 & 55 \\ -90 & 63 & -117 & 90 \\ 17 & 21 & -39 & -64 \\ -83 & -3 & 66 & -11 \end{pmatrix},$

$$C^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -5 & 4 & 6 \\ -7 & 5 & -4 & -3 \\ -1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Es más fácil hacer las inversas de esas matrices por el método de los adjuntos. En cualquier caso, se obtiene que la matriz A es inversible para todo $a \neq -1$, B es inversible para todo $a \neq 2$ y $a \neq \pm\sqrt{2}$ y C lo es para todo $a \in \mathbb{R}$, y las inversas son:

$$A^{-1} = \frac{1}{8(1+a)}\begin{pmatrix} -16 & 8 & 8 \\ 6a-6 & 2-4a & 6 \\ 9-a & 2a-3 & -5 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a+1}{2-a^2} & \frac{1}{(a-2)(2-a^2)} & \frac{1}{2-a^2} \\ 0 & \frac{1}{2-a} & 0 \\ \frac{1}{2-a^2} & \frac{a-1}{(a-2)(2-a^2)} & \frac{a-1}{2-a^2} \end{pmatrix},$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \cos a & -\operatorname{sen} a & 0 \\ \operatorname{sen} a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sección 2.5.4

1. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} +$
$a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} +$
$a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} -$
$a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} -$
$a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}.$

2. -18.

4. El valor del determinante es $(x-1)^6$. Luego la solución de la ecuación es $x = 1$.

Sección 2.6.4

5. (a) El sistema es siempre compatible indeterminado: si $a = -1/2$ y $b = 5/4$, la solución depende de dos parámetros; en cualquier otro caso depende de un solo parámetro.

Sección 2.8

1. (a) Cuando las tres rectas coinciden. (b) Cuando las tres rectas se cortan en un punto (bien siendo distintas las tres rectas o bien siendo dos iguales y la otra las corta). (c) Hay cuatro casos posibles: que las tres rectas sean distintas y paralelas; que dos rectas coincidan y la tercera sea paralela; que dos rectas sean paralelas y la tercera corte a ambas; que las tres rectas se corten dos a dos (formando un triángulo).

En el caso homogéneo, las tres rectas pasan por el origen, manteniéndose los casos considerados en las respuestas (a) y (b) y siendo imposible cualquiera de los casos contemplados en (c)

2. La solución es: $(x, y, z) = (az + p, bz + q, z)$ (una recta, intersección de los dos planos definidos por las ecuaciones). Observe que $(x, y, z) = (az + p, bz + q, z) = (p, q, 0) + (a, b, 1)z$, y que por tanto las soluciones forma la recta que pasa por el punto $(p, q, 0$ con vector director $(a, b, 1)$.

4. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1+(-1)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

6. Se responde aquí a la solución de este ejercicio según la modificación indicada en la sección de erratas. Si el número de horas diarias que trabajan las cuatro hormigoneras se denota respectivamente por x, y, z, w, entonces la respuesta a la primera pregunta es: $(x, y, z, w) = \left(3 - \frac{w}{4}, 5 - \frac{5w}{12}, 4 - \frac{w}{3}, w\right)$. Y los números de horas máximo y mínimo que puede trabajar la cuarta hormigonera es de 11 y 1, respectivamente.

7. (a) Incompatible. (b) Incompatible. (c) $(x, y) = (2y + 3, y)$.
(d) $(x, y, z, s, t) = (7 - 2y - 3s, y, -1, s, 2)$. (e) $(x, y, z) = (3, 1, 2)$.
(f) $(x, y, z, w) = (3, 5, -1, 8)$. (g) $(x, y, z) = (-4, 2, 7)$.
(h) $(x, y, z, w) = (w - 1, 2z, z, w)$. (i) $(x, y, z, w) = (-z/4, -z/4 - w, z, w)$.
(j) $(x, y, z) = (z/8, 5z/16, z)$. (k) $(x, y, z) = (-3z/7, -4z/7, z)$.
(l) $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

8. (a) Si $1 \neq a \neq b$, $(x, y, z) = \left(0, \frac{b-1}{b-a}, \frac{1-a}{b-a}\right)$; si $1 \neq a = b$, es incompatible; si $1 = a \neq b$, $(x, y, z) = (1 - y, y, 0)$; si $1 = a = b$, $(x, y, z) = (1 - y - z, y, z)$.

(c) Si $a \neq 0$ y $b \neq 2$, $(x, y, z) = \left(\frac{2-b}{a}, \frac{b-2}{a}, 1\right)$; si $a \neq 0$ y $b = 2$, $(x, y, z) = \left(\frac{2-2z}{a}, \frac{2-2z}{a}, z\right)$; si $a = 0$ y $b \neq 2$, es incompatible; si $a = 0$ y $b = 2$, $(x, y, z) = (x, y, 1)$.

(d) $(x, y) = ((6a - b)/9, (-3a + 2b)/9)$.

(e) $(x, y, z) = (a - c/3, a - b/2, -a + b/2 + c/3)$.

(g) Si $a \neq -3, 0, 2$, $(x, y, z) = \left(\frac{3}{a+3}, \frac{2a-9}{(a-2)(a+3)}, \frac{4a-3}{(a-2)(a+3)}\right)$; si $a = -3$, es incompatible; si $a = 0$, $(x, y, z) = (2 - 2z, 1 + z, z)$; si $a = 2$, es incompatible.

10. $(a, b, c) = (\pi/2, \pi, 0)$.

11. (a) El sistema es compatible (indeterminado dependiendo de dos parámetros) si y solo si $b_1 = b_2 = -b_3/2$. (b) El sistema es compatible (indeterminado dependiendo de un parámetro) si y solo si $b_3 = b_1 + b_2$. (c) El sistema es compatible (determinado) para cualesquiera $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$.

12. (a) $(x, y, z) = (16/3, -4/3, -11/3)$. (b) $(x, y, z) = (-5/3, 5/3, 10/3)$.
(c) $(x, y, z) = (3, 0, -4)$. (d) $(x, y, z) = (41/42, -5/6, 25/21)$.

13. $k = -1$ y $k = 12/11$.

18. Las matrices pueden ser de las tres formas siguientes: $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} a & b \\ -a^2/b & -a \end{pmatrix}$, donde a, b y c son distintos de cero.

19. (a) $M^n = 3^{n-1}M$ y $B^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. (b) Nunca ocurrirá que $B^2 = B$ ni que $B^2 = I_2$; y $B^2 = 0_2$ si y solo si $a = 0$.

20. (a) $M^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

21. (a) Ejemplos de matriz simétrica: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$.

Ejemplos de matriz antisimétrica: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) $A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$.

22. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3/2 & 2 \\ -3/2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 5/2 & 1 \\ -5/2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

23. (a) Se llega a que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & d \end{pmatrix}$ $(a, b, d \in \mathbb{R})$ o $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

24. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

25. $A_1^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$, $\nexists A_3^{-1}$,

$B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & -1{,}1 & -1{,}2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}4 \end{pmatrix}$, $\nexists B_2^{-1}$, $B_3^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$C_1^{-1} = \begin{pmatrix} 3{,}5 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C_2^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$D_2^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$, $E_1^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\nexists E_2^{-1}$.

26. $A^{-1} = \dfrac{1}{a^2-5a+2}\begin{pmatrix} a-2 & 2 \\ 2 & a-3 \end{pmatrix}$, si $a \neq \frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$; $\nexists A^{-1}$ si $a = \frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$.

$C^{-1} = \dfrac{1}{a(b-2)}\begin{pmatrix} -2 & b & -b \\ -2 & 2 & b-4 \\ a & -a & a \end{pmatrix}$, si $a \neq 0$ y $b \neq 2$; $\nexists C^{-1}$ si $a = 0$ o $b = 2$.

$D^{-1} = \dfrac{1}{a^4}\begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 & 0 \\ -a^2 & a^3 & 0 & 0 \\ a & -a^2 & a^3 & 0 \\ -1 & a & -a^2 & a^3 \end{pmatrix}$, si $a \neq 0$; $\nexists D^{-1}$ si $a = 0$.

27. (a) -21 (con la corrección —indicada en las erratas— de sustituir el 13 que aparece en la matriz por -3. (b) 6.

28. (a) -120. (b) 0.

29. $\det(A_1) = -1$, $\det(A_2) = 1$, $\det(A_3) = 0$, $\det(B_1) = -10$, $\det(B_2) = 0$, $\det(B_3) = -2$, $\det(C_1) = 2$, $\det(C_2) = -2$, $\det(C_3) = -6$, $\det(D_1) = 1/10$, $\det(D_2) = 1$, $\det(E_1) = 64$, $\det(E_2) = 0$, $\det(A) = a^2 - 5a + 2$, $\det(B) = 2b$, $\det(C) = a^2(b-2)$, $\det(D) = a^4$.

30. (a) 8. (b) $x(x-a)(x-d)(x-f)$. (c) $abc(b-a)(c-a)(c-b)$. (d) $(b^2-a^2)^4$.

31. (a) $x = \pm 4$. (b) $x = 1$ y $x = 2$.

32. (a) 135. (b) 8/5. (c) 1/40. (d) 5. (e) -5. (f) 5. (g) 5. (h) 10.

33. Otra matriz que tiene esa propiedad es la matriz identidad.

37. (a) 0 y 1.

39. (a) Basta fijarse en los resultados del ejercicio 29. (b) Los resultados son obviamente los mismos que los dados para los ejercicios 25 y 26.

41. (a) $(I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (b) $(I-A)^n = \begin{pmatrix} 1 & -n & \frac{n(n-1)}{2} & \frac{-n(n-1)(n-2)}{6} \\ 0 & 1 & -n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) $(I+A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (d) $(I+A)(I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

42. (a) El rango es 3 si $\alpha \neq 2$ y $\alpha \neq 3$; el rango es 2 si $\alpha = 2$ o $\alpha = 3$. (b) El rango es 4 si $\alpha \neq 3$; el rango es 2 si $\alpha = 3$.

43. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

45. (a) Si $a \neq 2b$, es compatible determinado; si $a = 2b$, es incompatible.
(b) Véase el apartado (g) del ejercicio 8 de esta sección.
(c) Si $a \neq 0$, es compatible determinado; si $a = 0$, es incompatible.
(d) Si $a \neq -2$ y $a \neq 1$, es compatible determinado; si $a = -2$, es incompatible; si

$a = 1$, es compatible indeterminado (dependiendo la solución de dos parámetros).
(e) Véase el apartado (a) del ejercicio 8 de esta sección.
(h) Si $a \neq -1$, es incompatible; si $a = -1$, es compatible indeterminado (dependiendo la solución de un parámetro).
(k) El sistema coincide con el del apartado (h) del ejercicio 8 de esta sección; si $a \neq -24$ y $a \neq 2$, es compatible determinado; si $a = -24$, es incompatible; si $a = 2$, es compatible indeterminado (dependiendo la solución de un parámetro).
(n) Si $a \neq \frac{3b+1}{5}$, es incompatible; si $a = \frac{3b+1}{5}$ y $b \neq 8$, es compatible determinado; si $b = 8$ y $a = \frac{3b+1}{5} = 5$, es incompatible.
(o) Si $a \neq 1$, es compatible indeterminado (dependiendo la solución de un parámetro); si $a = 1$, es compatible indeterminado (dependiendo la solución de dos parámetros).

46. $(x, y, z, u) = (3u/8, u/4, -7u/8, u)$.