Capítulo 1
Soluciones de ejercicios seleccionados

Sección 1.1.3

3. $\operatorname{card} \mathcal{P}(A) = 2^n$.

Sección 1.2.7

1. $\sup A = \max A = 4$, $\operatorname{ínf} A = \min A = -4$; $\sup B$, $\operatorname{ínf} B$, $\max B$ y $\min B$ no existen ya que $B = (-\infty, 17] \cup [-1, \infty)$.

2. Sobre la recta real habrá que representar los conjuntos $A = [-6, 6]$ y $B = [-6, -1) \cup (-1, 4]$.

3. $\operatorname{int} A = \emptyset$, $\operatorname{ext} A = \mathbb{R} - A - \{2\}$, $\operatorname{ais} A = A$, $A' = \{2\}$, $\overline{A} = \partial A = A \cup \{2\}$.

Sección 1.3.6

1. $\operatorname{int} A = \emptyset$, $\operatorname{ext} A = \mathbb{R} - A - \{1\}$, $\operatorname{ais} A = A$, $A' = \{1\}$, $\overline{A} = \partial A = A \cup \{1\}$.
Corrigiendo la errata de que la unión se toma para $n \in \mathbb{N}$ el resultado es $\operatorname{int} B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n, n+1)$, $\operatorname{ext} B = \mathbb{R}^- \cup \left[(0,1) - \left\{ \frac{1}{1+n},\ n \in \mathbb{N} \right\} \right]$, $\operatorname{ais} B = \left\{ \frac{1}{1+n},\ n \in \mathbb{N} \right\}$, $B' = [1, \infty) \cup \{0\}$, $\partial B = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{1+n},\ n \in \mathbb{N} \right\}$, $\overline{B} = [1, \infty) \cup \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{1+n},\ n \in \mathbb{N} \right\}$.

3. (a.1) $A_1 = \{Q \in \mathbb{R}^2 : \|P - Q\| = a\} = C(P, a)$, circunferencia de centro P y radio a.
(a.2) $A_2 = \{Q \in \mathbb{R}^2 : \|P - Q\| < a\} = B(P, a)$, círculo abierto (o bola abierta) de centro P y radio a.
(b.1) $B_1 = \{Q \in \mathbb{R}^3 : \|P - Q\| = a\} = S(P, a)$, superficie esférica de centro P y radio a.
(b.2) $B_2 = \{Q \in \mathbb{R}^3 : \|P - Q\| > a\} = \mathbb{R}^3 - B[P, a]$, $\mathbb{R}^3$ menos la bola cerrada de centro P y radio a.

4. (a) $\arccos \dfrac{33}{5\sqrt{58}} \simeq 0{,}5224$ rad. (b) $\pi/2$ rad.

5. $v = \left(\frac{1-\lambda}{2}, \frac{3\lambda-1}{2}, \lambda\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

6. (a) Es incorrecta: es necesario especificar qué producto se hace en primer lugar. (b) Es correcta y se obtiene un vector de $\mathbb{R}^3$. (c) Es correcta y se obtiene un escalar. (d) Es falsa, pues no pueden multiplicarse vectorialmente un escalar y un vector.

7. (a) Solo tendría sentido si el primer punto indica la operación producto por escalares y el segundo el producto escalar. En tal caso se obtiene un vector de $\mathbb{R}^n$. (b) No tiene sentido sumar escalares con vectores. (c) La norma de un escalar es su valor absoluto, pero no suele emplearse la notación de norma en ese caso. (d) Tiene sentido y es un vector de $\mathbb{R}^n$. (e) Tiene sentido cuando el primer y tercer punto es el producto escalar, y el segundo es un producto por escalares. Se obtiene como resultado un escalar.

8. Paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 2+t \\ y = -1+3t \end{array}\right\}$, $t \in \mathbb{R}$. Continua: $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{3}$.
Normal: $(x-2, y+1)\cdot(-3,1) = -3(x-2)+y+1 = 0$.

9. Paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 1+2\alpha-\beta \\ y = 2\alpha \\ z = 1+\alpha+\beta \end{array}\right\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Segmentaria: $\frac{x}{2} + \frac{y}{-4/3} + \frac{z}{2} = 1$.

Sección 1.4.4

1. (a) $13i$. (b) $-i$.

2. $e^{z+w} = e^2(\cos 3/2 + i \operatorname{sen} 3/2)$, $e^{zw} = e(\cos 1 - i \operatorname{sen} 1)$.

Sección 1.5

1. $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \ : -1 \leq x < 3\} = [-1,3)$, $A \cap C = C = \{-1,0,1\}$, $B \cap C = \{1\}$,
$A \times B = [-1,2) \times (0,3)$,
$A \times C = \{(x,-1),(x,0),(x,1) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 \leq x \leq 2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [-1,2],$
$y \in \{-1,0,1\}\}$.

2. $\operatorname{card} A_1 \times A_2 \times A_3 = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$, $\operatorname{card} \mathcal{P}(A_1) \times \mathcal{P}(A_2) \times \mathcal{P}(A_3) = 2^{n_1+n_2+n_3}$ y $\operatorname{card} \mathcal{P}(A_1 \times A_2 \times A_3) = 2^{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3}$.

3. $|p - 15| \leq 0{,}9$.

4. $A = [-1, \infty)$. Luego $\inf A = \min A = -1$, y $\sup A$ y $\max A$ no existen.
$B = (-\infty,-3) \cup (1,3)$. Luego $\sup B = 3$, pero $\inf B$, $\max B$ y $\min B$ no existen.
$C = (-\infty, 3)$. Luego $\sup C = 3$, pero $\max C$, $\inf C$ y $\min C$ no existen.

$D=[-2,5)$. Luego $\sup D=5$, $\text{ínf}\, D=\min D=-2$ y $\max D$ no existe.
$E=[-11/2,-4)$. Luego $\sup E=-4$, $\max E$ no existe y $\min E=\text{ínf}\, E=-5{,}5$.
$F=(-21/5,13/5)$. Luego $\sup F=13/5$, $\text{ínf}\, F=-21/5$, y $\max F$ y $\min F$ no existen.
$G=(-23/7,-3)\cup(-3,-19/7)$. Luego $\sup G=-19/7$, $\text{ínf}\, G=-23/7$, y $\max G$ y $\min G$ no existen.
$H=[-1,1]\cup[3,\infty)$. Luego $\text{ínf}\, H=\min H=-1$, y $\sup H$ y $\max H$ no existen.

5. $\operatorname{int} B=(1,3)$, $\operatorname{ext} B=\mathbb{R}-\mathbb{Z}-(1,3)$, $\operatorname{ais} B=\mathbb{Z}-\{1,2,3\}$, $B'=[1,3]$, $\overline{B}=\mathbb{Z}\cup(1,3)=B$ y $\partial B=\mathbb{Z}-\{2\}$.
Con la modificación indicada en las erratas, $\operatorname{int} C=(-3,-1)\cup(1,2)$, $\operatorname{ext} C=(-\infty,-3)\cup(-1,0)\cup(2,\infty)\cup\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)\right]$, $\operatorname{ais} C=\left\{\frac{1}{n+1},n\in\mathbb{N}\right\}$, $C'=[-3,-1]\cup\{0\}\cup[1,2]$, $\overline{C}=[-3,-1]\cup[1,2]\cup\left\{\frac{1}{n+1},n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}$ y
$\partial C=\left\{\frac{1}{n+1},n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{-3,-1,0,1,2\}$.
$\operatorname{int} D=\operatorname{ext} D=\operatorname{ais} D=\emptyset$ y $D'=\overline{D}=\partial D=\mathbb{R}$.

8. $\operatorname{int} A=A$, $\operatorname{ais} A=\emptyset$, $A'=\overline{A}=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}([n,n+1]\times[n,n+1])$,
$\operatorname{ext} A=\mathbb{R}^2-\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}([n,n+1]\times[n,n+1])$ y $\partial A=\{(n,y):n\in\mathbb{Z},\ y\in[n-1,n+1]\}\cup\{(x,n):n\in\mathbb{Z},\ x\in[n-1,n+1]\}$.

9. (a) $(3,-3,3)$. (b) $(-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3})$.

10. (a) $(7/2,-1/2,5/2)$. (b) $(4,-1,3)$.

11. $\pm\frac{1}{\sqrt{14}}(1,3,-2)$.

12. $u\times v=(0,0,u_1v_2-u_2v_1)$. Es un vector perpendicular al plano xy.

15. $u\times(v\times w)$ está en el plano que contiene a los vectores v y w. $(u\times v)\times w$ está en el plano que contiene a los vectores u y v.

16. Vectorial: $(x,y)=(1,-1)+t(1,4)$, $t\in\mathbb{R}$. Paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x=1+t \\ y=-1+4t\end{array}\right\}$, $t\in\mathbb{R}$.
Continua: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{4}$.. Normal: $(x-1,y+1)\cdot(-4,1)=-4(x-1)+y+1=0$.

17. Normal: $(x+2,y-1)\cdot(1,3)=x+2+3(y-1)=0$. Vectorial: $(x,y)=(-2,1)+t(-3,1)$, $t\in\mathbb{R}$.

18. Paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x=5 \\ y=1+t \\ z=1+2t \end{array}\right\}$, $t\in\mathbb{R}$. Continua: $\dfrac{x-5}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$.

Vectorial: $(x,y,z)=(5,1,1)+t(0,1,2)$, $t\in\mathbb{R}$. Reducidas: $\left.\begin{array}{l} x=5 \\ y=\frac{z+1}{2} \end{array}\right\}$.

19. Paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x=1-t \\ y=7-5t \\ z=1+2t \end{array}\right\}$, $t\in\mathbb{R}$. Continua: $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-7}{-5}=\dfrac{z-1}{2}$.

Vectorial: $(x,y,z)=(1,7,1)+t(-1,-5,2)$, $t\in\mathbb{R}$. Reducidas: $\left.\begin{array}{l} y=5x+2 \\ z=-2x+3 \end{array}\right\}$.

20. Paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x=1+t \\ y=2-3t \\ z=3+t \end{array}\right\}$, $t\in\mathbb{R}$. Continua: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{1}$.

Vectorial: $(x,y,z)=(1,2,3)+t(1,-3,1)$, $t\in\mathbb{R}$. Reducidas: $\left.\begin{array}{l} y=-3x+5 \\ z=x+2 \end{array}\right\}$.

21. Paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x=1+\alpha \\ y=1-\beta \\ z=1+2\alpha \end{array}\right\}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Normal: $(x-1,y-1,z-1)\cdot(2,0,-1)=0$.
General: $2x-z=1$.

22. Normal: $(x-1,y-0,z+2)\cdot(1,2,3)=0$. General: $x+2y+3z+5=0$.
Paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x=1+10\alpha+15\beta \\ y=-5\alpha \\ z=-2-5\beta \end{array}\right\}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

23. (a) $|z|=3$, $|w|=2\sqrt{3}$, $\arg z=3\pi/2$ y $\arg w=5\pi/6$. (b) $e^z=\cos 3-i\,\mathrm{sen}\,3$, $e^w=e^{-3}\cos\sqrt{3}+ie^{-3}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{3}$, $|e^z|=1$, $|e^w|=e^{-3}$, $\arg e^z=2\pi-3$ y $\arg e^w=\sqrt{3}$. (c) $z^2=-9$, $z^3=27i$, $w^2=6-6\sqrt{3}i$ y $w^3=24\sqrt{3}i$.

24. $|z|=|w|$.

25. (a) Falsa. (b) Cierta.