Capítulo 5
Soluciones de ejercicios seleccionados

Sección 5.1.3

1. 744 euros.

2. 87,5 m.

3. Es posible ya que en 5 minutos podrían llenarse 14000 litros.

4. Por simplicidad, en éste y en los sucesivos ejercicios en los que se pida obtener integrales indefinidas daremos solo una primitiva (la integral indefinida se obtendría sumando una constante genérica a esa primitiva). Si llamamos (a), (b), (c), etc. a las distintas integrales indefinidas, empezando por las de la primera línea y de izquierda a derecha, los resultados son:
(a) $\frac{1}{4}\ln^2 x^2$. (b) $-(x+1)(x-3)e^x$. (c) $\frac{2}{9}\sqrt{3x^3-8}$.
(d) $\frac{1}{2}\left[3\ln(x^2+4) - 4\ln|x+3| - 5\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}\right]$. (e) $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}+3\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-3\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\right|$, o también $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{3\operatorname{sen}x-\cos x+1}{\operatorname{sen}x+3\cos x-3}\right|$. (f) $\frac{1}{\ln 3}\left[\frac{1}{2}\ln(3^{-2x}+1) - 3^{-x} - \ln 3^{-x} + 2\operatorname{arc\,tg}3^{-x}\right]$.

Sección 5.2.3

1. $\int_{-1}^{4}|f(x)|\,dx = -\int_{-1}^{0}f(x)\,dx + \int_{0}^{2}f(x)\,dx - \int_{2}^{3}f(x)\,dx + \int_{3}^{4}f(x)\,dx$.

2. $\int_0^1[-2-(-5)]\,dx$. O bien, mediante la integral doble de $f(x,y)=1$ sobre $A=[0,1]\times[-5,-2]$, es decir, $\int_0^1\int_{-5}^{-2}dy\,dx$.

Sección 5.3 (pág. 248)

1. (a) $\frac{2}{3}(4\sqrt{13}-1)$. (b) $\frac{1209}{28}$.

2. $\frac{61}{49}\simeq 1{,}24$ grados centígrados a las $13-\sqrt{37}$ horas (6:55:02).

3. $\operatorname{Dom} f=\mathbb{R}$ y f tiene un máximo local en $x=-1$ y un mínimo local en $x=1$.

4. No existe, pues cuando $x\to 1^-$ tiende a $-\infty$ y cuando $x\to 1^+$ tiende a ∞.

Sección 5.4.5

1. (a) -1 (observe que el dominio de integración es una región de tipo II).
(b) 0 (conviene realizar un cambio semejante al de coordenadas polares).

2. (a) $\frac{1}{6}$. (b) $\frac{\pi}{4}$ (conviene realizar un cambio a coordenadas cilíndricas).
(c) $\frac{4\pi}{15}(316 - 67\sqrt{2})$ (conviene realizar un cambio a coordenadas esféricas).

Sección 5.5 (pág. 263)

1. (a) La demostración es sencilla, se basa en que $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$ y $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}$ tiende a ∞ cuando $p < 1$ y vale cero cuando $p > 1$. En este último caso $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \frac{1}{p-1}$.
(b) Aplicando el apartado (a) se obtiene que las tres integrales son convergentes y sus valores son $\frac{5}{21 - 5\sqrt{5}}$, $\frac{10}{43 - 10\sqrt{5}}$ y $\frac{1}{2}$.

2. La igualdad no es cierta, pues el integrando es una función no acotada en el intervalo $[0, 3]$ y sus integrales en los intervalos $[0, 2)$ y $(2, 3]$ son divergentes hacia $-\infty$ y ∞, respectivamente.

Sección 5.6.3

1. En la primera integral con el método de los trapecios es necesario tomar, como mínimo, 164 intervalos; y con el método de Simpson, como mínimo, 9 intervalos (que equivale, al considerar los puntos medios, a tomar 18 intervalos o más). En la segunda integral con el método de los trapecios es necesario tomar, como mínimo, 184 intervalos; y con el método de Simpson, como mínimo, 11 intervalos (que equivale a tomar 22 o más intervalos).

2. $\frac{1235}{3} \simeq 411{,}67$ m^2.

3. Aplicando el método de trapecios se obtiene $\pi \simeq \frac{5323}{1700} \simeq 3{,}131176471$ y aplicando el método de Simpson se obtiene $\pi \simeq \frac{152916620159}{48674874300} \simeq 3{,}141592502$ (note que $\pi \simeq 3{,}141592654$).

Sección 5.7.4

1. La medida de dicho volumen es π.

2. La medida del área es $\frac{(5\sqrt{5} - 1)\pi}{6}$.

3. El agua ejerce una fuerza de 98 newton sobre cada una de las dos paredes mayores y una fuerza de 58,8 newton sobre cada una de las dos paredes menores.

4. La probabilidad pedida es $\frac{(e\sqrt{e} - 1)^2}{e^3} \simeq 0{,}6$, es decir, el riesgo queda cubierto en aproximadamente un 60 % de los casos.

Sección 5.8

1. (a) $\dfrac{\ln(x^4+1)}{4}$. (b) $\dfrac{5}{24}(x^4+1)^{6/5}$. (c) $\dfrac{4}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{\sqrt{5}}$. (d) $\dfrac{-5}{4}\sqrt{1-4x^2}$.
(e) $\ln|\ln x|$. (f) $\dfrac{-3}{2(x-2)^2}$. (g) $\dfrac{\ln(x^2+16)}{2}$. (h) $\dfrac{x^{2/3}}{22}(20x^{13/30}+33)$.
(i) $\dfrac{(x+1)\sqrt{x+1}-(x-1)\sqrt{x-1}}{3}$. (j) $\operatorname{tg} x - x$. (k) $\dfrac{(4/3)^x}{2\ln 2-\ln 3}$.
(l) $-\cos e^x$. (m) $\dfrac{\operatorname{sen}^6 x}{6}$. (n) $\dfrac{-\ln^2\cos x}{2}$. (ñ) $\ln|3x^3-2x^2|$. (o) $\dfrac{2}{3}(\ln x)^{3/2}$.

2. (a) $(x-1)e^x$. (b) $\operatorname{sen} x - x\cos x$. (c) $-(3x^2-7x+6)e^x$.
(d) $\dfrac{1}{4}(3-2x^2)\cos 2x+\dfrac{1}{2}x\operatorname{sen} 2x$. (e) $x(\ln x-1)$. (f) $\dfrac{1}{16}x^4(4\ln x-1)$.
(g) $\dfrac{2}{9}x\sqrt{x}(3\ln x-2)$. (h) $\dfrac{1}{4}x^2(1+2\ln x(\ln x-1))$. (i) $\dfrac{\ln^2 x}{2}$.
(j) $x\operatorname{arc\,tg} x-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$. (k) $\dfrac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x-\cos x)$. (l) $\dfrac{e^{3x}}{13}(3\operatorname{sen} 2x-2\cos 2x)$.

3. (a) $\ln(x^2+x+1)-\dfrac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$. (b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\dfrac{x+\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}-x}\right|$. (c) $\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$.
(d) $\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)^2}-\dfrac{2}{3(x-1)}-\dfrac{\sqrt{3}}{9}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$. (e) $-\operatorname{arc\,tg} x+\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$.
(f) $\dfrac{1}{5}\ln|x+2|-\dfrac{1}{10}\ln(x^2+1)+\dfrac{2}{5}\operatorname{arc\,tg} x$. (g) $-\dfrac{5}{2}\ln|x-1|+\dfrac{5}{4}\ln(x^2+1)-\dfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x$.
(h) $2\ln|x|-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$. (i) $\dfrac{3}{5}\left(\ln\dfrac{(x-2)^2}{x^2+1}+\operatorname{arc\,tg} x\right)$.
(j) $\dfrac{1}{40}(10\ln|x|-5\ln|x+2|+3\ln|x-2|)-\dfrac{1}{10}(\ln(x^2+1)+4\operatorname{arc\,tg} x)$. (k) $\dfrac{1}{3}\ln|x^3-1|$.
(l) $x-\operatorname{arc\,tg} x$. (m) $2\ln|x-3|-\ln|x-2|$. (n) $x-2\operatorname{arc\,tg} x$.
(ñ) $\ln(x^2+x+1)-2\ln|x+1|$. (o) $\dfrac{2}{3}\ln|x-1|-\dfrac{1}{3}\ln(x^2+x+1)$.
(p) $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|-\dfrac{x}{2(x-1)^2}$. (q) $\ln|x|-2\ln|x-1|$. (r) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$. (s)
$x+\dfrac{2}{x}+2\operatorname{arc\,tg} x$. (t) $\dfrac{9x-10}{30(3x^2+5)}+\dfrac{\sqrt{3}}{10\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{3}{5}}\,x$.
(u) $-\dfrac{3x^3+5x+2}{8(x^2+1)^2}-\dfrac{3}{8}\operatorname{arc\,tg} x$.

4. (a) $\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|$. (b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|$. (c) $\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right|$; $\ln\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$ y
$\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$ son otras dos soluciones correctas. (d) $\operatorname{tg} x-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$.
(e) $\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}-x$. (f) $\dfrac{2x}{5}+\dfrac{1}{5}\ln|2+\operatorname{tg} x|-\dfrac{1}{10}\ln(1+\operatorname{tg}^2 x)$, o también
$\dfrac{1}{5}(2x+\ln|\operatorname{sen} x+2\cos x|)$. (g) $\dfrac{3}{5}(2\ln|\operatorname{tg} x-2|-\ln(1+\operatorname{tg}^2 x)+x)$.
(h) $\dfrac{-5}{2}\ln|\operatorname{tg} x-1|+\dfrac{5}{4}\ln(1+\operatorname{tg}^2 x)-\dfrac{x}{2}$, o también $\dfrac{-5}{4}\ln(1-\operatorname{sen} 2x)-\dfrac{x}{2}$.
(i) $\dfrac{\cos^2 x}{2}-\ln|\cos x|$. (j) $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{sen} x)$. (k) $\cos x-2\operatorname{arc\,tg}(\cos x)$. (l) $\dfrac{\cos^3 x}{3}-\cos x$.

(m) $\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x$. (n) $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{10}\operatorname{sen} 5x$. (ñ) $\frac{1}{6}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{14}\operatorname{sen} 7x$.
(o) $\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$. (p) $\frac{1}{192}[12x + 3(\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 4x) - \operatorname{sen} 6x]$.
(q) $x - 2\ln|e^x - 1|$. (r) $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2e^x - 1}{\sqrt{3}}$. (s) $e^x + 2e^{-x} + 2\operatorname{arc\,tg} e^x$.
(t) $\frac{\operatorname{arc\,tg} 2^x}{\ln 2}$. (u) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right|$.

5. (g) $\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{5}$. (h) $5\ln\frac{5 - \sqrt{25 - x^2}}{|x|} + \sqrt{25 - x^2}$. (i) $\sqrt{x^2 - 4} - \frac{2|x|}{x}\arccos\frac{2}{x}$.
(j) $\frac{3x^2 + 8}{15}(x^2 - 4)^{3/2}$. (l) $\frac{x\sqrt{x^2 + 4}}{2} + 2\ln\left|\frac{x + 2 + \sqrt{x^2 + 4}}{x - 2 - \sqrt{x^2 + 4}}\right|$, o también $\frac{x\sqrt{x^2 + 4}}{2} + 2\ln\frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$. (m) $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 - 1} - \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right|\right)$.
(n) $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{9 - x^2} + 9\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{3}\right)$.

6. (a) $\frac{1}{2}\ln\left|\ln x^2\right|$. (b) $2\ln|\operatorname{sen} x| - \ln|\cos x|$.
(c) $\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(1 + \sqrt{2}x\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(1 - \sqrt{2}x\right)\right] + \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$.
(d) $\frac{x^2}{2} - 4x + 9\ln|x + 2| + \frac{3}{x + 2}$. (e) $\frac{e^{-x}}{10}(3\operatorname{sen} 3x - \cos 3x)$.
(f) $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + \operatorname{arc\,tg} x$. (g) $-\ln|\cos x|$.
(h) $\frac{x}{2} + \ln|x| - 2\ln(x^2 + 3x + 4) - \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x + 3}{\sqrt{7}}$. (i) $\frac{5}{2}\operatorname{arc\,sen} 2x$.
(j) $\frac{1}{40}\left[10\ln|\operatorname{tg} x| + 3\ln|\operatorname{tg} x - 2| - 5\ln|\operatorname{tg} x + 2| - 4\ln(1 + \operatorname{tg}^2 x) - 16x\right]$.
(k) $x\operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1 - x^2}$.
(l) $\frac{1}{\ln 3}\left(\ln 3^x + \frac{3^x}{2} - 2\ln(3^{2x} + 3^{x+1} + 4) - \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\cdot 3^x + 3}{\sqrt{7}}\right)$.
(m) $\frac{1}{2}\ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$. (n) $-\frac{\sqrt{25 - x^2}}{25x}$. (ñ) $\frac{e^{x^2}(x^2 - 1)}{2}$.
(o) $\frac{\ln|\cos^3 x - 1|}{3}$. (p) $\frac{-(1 - x^2)^{3/2}}{3}$. (q) $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

7. (a) $\operatorname{Dom} a = \mathbb{R}$ y $a'(x) = \frac{3x^2}{1 + \operatorname{sen}^2 x^3}$. (b) $\operatorname{Dom} b = \mathbb{R}$ y $b'(x) = \frac{6x^2}{1 + \operatorname{sen}^2 x^3}$.
(c) $\operatorname{Dom} c = \mathbb{R}$ y $c'(x) = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x)}$. (d) $\operatorname{Dom} d = \mathbb{R}$ y $d'(x) = \frac{\cos\int_a^x \frac{dt}{1+\operatorname{sen}^2 t}}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$.
(e) $\operatorname{Dom} e = \mathbb{R}$ y $e'(x) = \int_8^x \frac{dt}{1 + t^2 + \operatorname{sen}^2 t}$. (f) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$ y $f'(x) = \frac{-1}{1 + x^2 + \operatorname{sen}^2 x}$.
(g) $\operatorname{Dom} g = \mathbb{R}$ y $g'(x) = \int_a^b \frac{dt}{1 + t^2 + \operatorname{sen}^2 t}$. (h) $\operatorname{Dom} h = \mathbb{R}$ y $h'(x) = 2xe^{-x^4}$.
(i) $\operatorname{Dom} i = \mathbb{R}$ e $i'(x) = 3x^2\cos x^3 - 2\cos 2x$. (j) Si $a > 0$, $\operatorname{Dom} j = \mathbb{R}^+$; si $a < 0$, $\operatorname{Dom} j = \mathbb{R}^-$; y si $a = 0$ la integral no está definida (ni siquiera como integral impropia). En cualquier caso, $j'(x) = \frac{1}{x(1 + x^2)} + \int_a^x \frac{dt}{t^2(1 + t^2)}$ para todo

$x \in \operatorname{Dom} j$. (k) $\operatorname{Dom} k = \mathbb{R}$ y $k'(x) = \dfrac{-\ln(x^2+1)}{1+\left(\int_x^2 \ln(t^2+1)\,dt\right)^2}$.

(l) $\operatorname{Dom} l = \mathbb{R}$ y $l'(x) = (\cos x)\displaystyle\int_0^{\operatorname{sen} x} e^{y^2}\,dy$. (m) $\operatorname{Dom} m = \mathbb{R}$ y $m'(x) = 0$.

(n) $\operatorname{Dom} n = \mathbb{R}$ y $n'(x) = \displaystyle\int_2^5 \frac{dt}{t^2 - \operatorname{sen} t}$. (ñ) $\operatorname{Dom} \tilde{n} = (s, \infty)$, donde s es la solución de $s^2 = \operatorname{sen} s$ que pertenece a $(0,1)$, y $\tilde{n}'(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{dt}{t^2 - \operatorname{sen} t} + \frac{x}{x^2 - \operatorname{sen} x}$.

(o) $\operatorname{Dom} o = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y $o'(x) = 2x^2 \operatorname{sen} x^2 - \sqrt{x}\operatorname{sen} x$.

8. (a) $\operatorname{Dom} f = (-\infty, 1)$. (b) $\operatorname{Dom} f' = (-\infty, 1)$ y $f'(x) = \dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{x-1}$.

9. Mínimo global en $(0,0)$ máximo global en $\left(1, \int_0^1 e^{t^2}\,dt\right)$.

10. $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{1\}$. En el punto $x = 1$ se tiene que $F(x)$ no es derivable, sin embargo, $G'(1) = 0 \neq 1 = g(1)$.

11. (a) $f(x)$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$. (b) Compruebe (aplicando la regla de la cadena) que G verifica la definición de primitiva. (c) Aplique la Regla de Barrow a la función $g(x)$ en el intervalo $[1, b]$.

12. (a) $f(t) = \operatorname{sen} t$ y $a = \pi/3$. (b) $f(t) = 6t$ y $a = (1/2)^{1/3}$.

13. $f(t) = 2t + 2$ y $a = -1 \pm \sqrt{5}$. Sin embargo, si f no fuese continua no podríamos aplicar el teorema 5.23.

14. (a) $1/3$. (b) 2. (c) 1. (d) $1/2$. (e) $6 - 3(1/2)^{1/3}$. (f) $4/15$. (g) $10/3$. (h) $4752/35$.

15. (a) 0. (b) $\dfrac{88 - \pi^3}{24} + \ln 2$.

16. (a) 1. (b) $\dfrac{11}{3840}$. (i) $\ln\dfrac{5}{2}$. (l) $\dfrac{1}{3}$. (ñ) 6π.

17. (c) $\dfrac{1}{12}$. (g) 2π. (j) 0. (l) 0. (m) 0. (ñ) $\dfrac{2\pi}{5}\rho_0^5(1 - \cos\phi_0)$.

18. $\displaystyle\int f(x)\,dx = \frac{1}{3}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{1\}$. La integral de f en el intervalo $[0,1]$ no existe (diverge a $-\infty$), sin embargo, en el intervalo $[2, \infty)$ sí existe (y su valor es $\dfrac{1}{6}\left[\ln 7 + \sqrt{3}\pi - 2\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}(5/\sqrt{3})\right]$).

19. (a) $-\infty$. (b) ∞. (c) $\pi/2$ y π. (e) $\dfrac{-1}{r+1}$ si $r < -1$, ∞ si $r \geq -1$, en el caso $(1, \infty)$. (f) $\dfrac{5}{4}$. (g) $-\infty$. (h) $\dfrac{1}{\ln 5 - \ln 2}$ en el caso $(0, \infty)$, ∞ en el caso $(-\infty, \infty)$. (i) $\dfrac{9\pi - 12\ln 2}{20}$. (k) $-\infty$. (l) $-\infty$. (m) π. (n) $\dfrac{2}{e}$. (ñ) $-\infty$. (p) $1 - \dfrac{\ln 3}{4}$. (r) $\dfrac{4\pi\sqrt{3}}{9}$. (s) diverge. (t) $\pi/2$. (u) $\dfrac{1}{e+1}$. (v) oscila.

21. $\mu = 1$.

23. (c) 4π.

33. (a) $4 - e + e^{-1}$. (b) $\frac{8}{3}$. (c) 8. (d) $\frac{16}{3}$. (e) $\frac{(e-1)^2}{e}$. (f) $\frac{-1}{6}$. (j) π.

40. (c) $\frac{\pi^2}{2}$.

48. (a) $12(e^4 - 1)$. (c) $\frac{2}{3}$. (d) $\frac{e-1}{2e}$. (f) $\frac{64\pi}{3}$. (g) $\frac{16\pi}{3}(8 - 3\sqrt{3})$.