Capítulo 4
Soluciones de ejercicios seleccionados

Sección 4.1.6

1. $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

2. $a'(x) = \left(\sqrt{x}\right)^{\cos 2x} \left(\dfrac{\cos 2x}{2x} - \operatorname{sen} 2x \ln x \right);$

$b'(x) = 9 \left(\operatorname{sen}^3 3x\right)^{\cos 3x} (\cos 3x \operatorname{cotg} 3x - \operatorname{sen} 3x \ln(\operatorname{sen} 3x));$

$c'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $d'(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{\ln x} \left(\dfrac{1}{x} \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) - \dfrac{2\ln x}{x^2-1} \right).$

3. $D_{(v_1,v_2)} f(1,2) = (\cos 6 - 4\cos 1)v_1 - (3\operatorname{sen} 6 + 4\operatorname{sen} 1)v_2.$

4. $D_{\frac{(-2,-4,0)}{\|(-2,-4,0)\|}} f(0,0,1) = 0.$

5. $a_{xx} = a_{yy} = \left(2 + 8(x-y)^2 \operatorname{tg}\left((x-y)^2 - 3\right)\right)\left(1 + \operatorname{tg}^2\left((x-y)^2 - 3\right)\right);$

$a_{xy} = a_{yx} = -a_{xx};$

$b_{xx} = -\operatorname{sen}(x+z^y)$; $b_{yy} = z^y (\ln z)^2 (\cos(x+z^y) - z^y \operatorname{sen}(x+z^y));$

$b_{zz} = y(y-1)z^{y-2}\cos(x+z^y) - y^2 z^{2y-2}\operatorname{sen}(x+z^y)$; $b_{xy} = b_{yx} = -z^y \ln z \operatorname{sen}(x+z^y);$

$b_{xz} = b_{zx} = -yz^{y-1}\operatorname{sen}(x+z^y);$

$b_{yz} = b_{zy} = z^{y-1}(1 + y\ln z)\cos(x+z^y) - yz^{2y-1}\ln z \operatorname{sen}(x+z^y).$

6. $\nabla a(x,y,z) = \left(\dfrac{1}{1+x+y^2+z^3}, \dfrac{2y}{1+x+y^2+z^3}, \dfrac{3z^2}{1+x+y^2+z^3} \right);$

$\nabla b(x,y,z) = \left(\dfrac{2y}{(x+y)^2}, \dfrac{-2x}{(x+y)^2}, 0 \right).$

7. $\dfrac{\partial a}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)/f(x,y,z)$; $\dfrac{\partial a}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)/f(x,y,z);$

$\dfrac{\partial a}{\partial z}(x,y,z) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)/f(x,y,z);$

$\dfrac{\partial b}{\partial x}(x,y,z) = \left(1 + \operatorname{tg}^2 f\left(x^2, \operatorname{sen} y, z-x\right)\right)$

$\times \left(2x \dfrac{\partial f}{\partial x}\left(x^2, \operatorname{sen} y, z-x\right) - \dfrac{\partial f}{\partial z}\left(x^2, \operatorname{sen} y, z-x\right) \right);$

$\dfrac{\partial b}{\partial y}(x,y,z) = \left(1 + \operatorname{tg}^2 f\left(x^2, \operatorname{sen} y, z-x\right)\right) \cos y \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(x^2, \operatorname{sen} y, z-x\right);$

$$\frac{\partial b}{\partial z}(x,y,z) = \left(1+\operatorname{tg}^2 f\left(x^2, \operatorname{sen} y, z-x\right)\right) \frac{\partial f}{\partial z}\left(x^2, \operatorname{sen} y, z-x\right);$$
$$c'(x) = 3f^2(x, \operatorname{sen} x, \ln x)\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \cos x \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial z}\right)(x, \operatorname{sen} x, \ln x).$$

8. (a) $y' = \dfrac{1-3x^2y^3}{3x^3y^2-1}$; $y'' = \dfrac{6xy^3+18x^2y^2y'+6x^3y(y')^2}{1-3x^3y^2}$.

(b) $y' = \dfrac{\cos y}{x \operatorname{sen} y} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; $y'' = \dfrac{-\operatorname{cotg} y}{x^2}(2+\operatorname{cotg}^2 y) = \dfrac{-x}{x^2-1}$.

(c) $y' = \dfrac{3x^2}{6y^2-4}$; $y'' = \dfrac{3x-6y(y')^2}{3y^2-2} = \dfrac{6x-27x^4y}{2(3y^2-2)}$.

En la derivada y'' de (a) queda sustituir y' por su valor.

9. (a) $z_x(x,y) = \dfrac{-(y+z)}{x+y-e^z}$; $z_y(x,y) = \dfrac{-(x+z)}{x+y-e^z}$;

$$z_{xx}(x,y) = \frac{-z_x(x+y-e^z)+(y+z)(1-z_xe^z)}{(x+y-e^z)^2} = \frac{(y+z)\left[e^z(2-y-z)-2(x+y)\right]}{(x+y-e^z)^3};$$
$$z_{xy}(x,y) = \frac{-(1+z_y)(x+y-e^z)+(y+z)(1-z_ye^z)}{(x+y-e^z)^2}$$
$$= \frac{1}{(x+y-e^z)^3}\left[e^{2z}+ze^z(2-x-y-z)-e^z(x+y+xy)-2(x+y)z\right];$$
$$z_{yx}(x,y) = \frac{-(1+z_x)(x+y-e^z)+(x+z)(1-z_xe^z)}{(x+y-e^z)^2}$$
$$= \frac{1}{(x+y-e^z)^3}\left[e^{2z}+ze^z(2-x-y-z)-e^z(x+y+xy)-2(x+y)z\right];$$
$$z_{yy}(x,y) = \frac{-z_y(x+y-e^z)+(x+z)(1-z_ye^z)}{(x+y-e^z)^2} = \frac{(x+z)\left[e^z(x+z-2)+2(x+y)\right]}{(x+y-e^z)^3}.$$

(b) $z_x(x,y) = \dfrac{e^x\cos(y+z)}{1+e^x\operatorname{sen}(y+z)}$; $z_y(x,y) = \dfrac{-e^x\operatorname{sen}(y+z)}{1+e^x\operatorname{sen}(y+z)}$;

$$z_{xx}(x,y) = \frac{e^x(1-e^{2x})\cos(y+z)}{(1+e^x\operatorname{sen}(y+z))^3};\ z_{yy}(x,y) = \frac{-e^x\cos(y+z)}{(1+e^x\operatorname{sen}(y+z))^3};$$
$$z_{xy}(x,y) = z_{yx}(x,y) = \frac{-e^x(e^x+\operatorname{sen}(y+z))}{(1+e^x\operatorname{sen}(y+z))^3}.$$

Sección 4.2.4

1. No se puede aplicar el teorema de Rolle puesto que la función no es continua en el intervalo propuesto.

2. (a) 3 soluciones como máximo. (b) Como máximo puede tener una solución.

3. Se resuelve aplicando el teorema del valor medio a la función $f(t) = \cos t$ en el intervalo $[y,x]$, y tomando posteriormente valores absolutos.

4. (a) Para cualquier $a \in (0, \infty)$ el resultado es $1/\sqrt{2a}$, para $a = 0$ el límite es $+\infty$. (b) α/β. (c) -1. (d) $+\infty$.

5. Para que f sea continua en 0 se tendrá que asignar $f(0) = 1/2$; de esta forma f será derivable en 0 pues existe el límite de su derivada en 0, y $f'(0) = 0$.

6. La función f es continua en $\mathbb{R} - \{1, 2\}$. En el punto 1 la discontinuidad es de salto, y en el punto 2 la discontinuidad es esencial (de salto infinito). La función f es derivable en $\mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$, siendo su expresión

$$f'(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\operatorname{sen}\frac{1}{x} & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1, \\ (x-2)^{-2} & \text{si } 1 < x < 2, \\ 2x + 1 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

En los puntos 0 y 2 las discontinuidades de f' son esenciales (oscilante en el primer caso, de salto infinito en el segundo), y en el punto 1 la discontinuidad es evitable.

7. $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(c+1)^{n+1}}$, con $0 < c < x$ ó $x < c < 0$.

Sección 4.3.4

1. f tiene un máximo tanto local como global en $-4/3$ y un mínimo global en 2; h presenta máximos locales en $-\sqrt{1/3}$ y $\sqrt{1/3}$, mínimos locales en 0 y 1, máximo global en 2, y mínimos globales en $0, 1$ y -1; j no tiene extremos locales en $[-1/2, 1]$, aunque sí un mínimo global en 1 y un máximo global en $-1/2$; en $[-1, 1]$ no tiene extremos, ni locales ni globales.

2. Se resuelve aplicando el teorema del valor medio a la función $f(t) = e^t$ en el intervalo $[0, x]$, y utilizando el hecho de que la función exponencial es creciente. Otro modo más sencillo: estudiando la monotonía de las funciones $r(x) = e^x - x - 1$ y $s(x) = 1 + xe^x - e^x$.

3. (a) No podemos asegurarlo pues no conocemos la monotonía de g. (b) No podemos asegurarlo pues no conocemos la expresión de g. (c) Por ser g continua en un intervalo cerrado se puede asegurar que tiene un máximo global y un mínimo global, aunque puede tener más entre locales y globales.

4. $x = 0,567143$.

5. f es convexa en $(-\infty, -\sqrt[3]{2}) \cup (1, +\infty)$ y cóncava en $(-\sqrt[3]{2}, +1)$. El único punto de inflexión es $-\sqrt[3]{2}$.

Sección 4.4

1. Bastará con comprobar que solo existe un punto de corte entre las funciones $y = 1/x$ e $y - 1/a = -(1/a^2)(x - a)$.

2. Una vez dibujada la gráfica de f en toda la recta real será fácil ver que la función no es derivable en los puntos del conjunto $\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, por lo tanto no será derivable en los puntos 0 y π del intervalo $[-\pi, 2\pi]$ (en $-\pi$ y 2π sí es derivable al estar definida la función solo a un lado de esos puntos).

3. (a) $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$; (b) $f'(x) = -1/x^2$; (c) $f'(x) = 2x + 2$.

4. (a) $f'(x) = g'(x + g(a))$; (b) $f'(x) = g(a)g'(xg(a))$;
(c) $f'(x) = (1 + g'(x))g'(x + g(x))$; (d) $f'(x) = g'(x)(x - a) + g(x)$;
(e) $f'(x) = g(a)$; (f) $f'(x) = g'(x^2 + x)(2x + 1)$.

5. $a'(x) = \dfrac{x(1 + \operatorname{tg}^2(x^2 + 1))}{\operatorname{tg}(x^2 + 1)\sqrt{\ln(\operatorname{tg}(x^2 + 1))}} = \dfrac{2x}{\operatorname{sen}(2x^2 + 2)\sqrt{\ln(\operatorname{tg}(x^2 + 1))}}$;

$$b'(x) = \frac{2 - 4x^2}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - 4x^2 + 4x^4)}} = \begin{cases} \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in \left(-1, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) \\ \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in \left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \end{cases};$$

$c'(x) = \sec^2 x - \cos x$; $d'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} = \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{x^2 - 1}}$;

$e'(x) = \dfrac{1}{x+1}$; $f'(x) = \dfrac{1}{\cos x}$; $g'(x) = \dfrac{1}{2 + 2x^2}$; $h'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$.

6. $f'(x) = |2x|$. El producto de dos funciones puede ser derivable en un punto aun cuando una de ellas no lo sea en dicho punto. Pero este resultado no es general. Por ejemplo, $r(x) = 2$ es derivable en $x = 0$, $g(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$ y $(rg)(x) = 2\,|x|$ tampoco lo es.

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x > 0, \\ -2 & \text{si } x < 0; \end{cases} \qquad f^{(n)}(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\},\ n \geq 3.$$

7. $a_x(x, y) = 4x^3 - 4y$; $a_y(x, y) = 4y^3 - 4x$;
$b_x(x, y) = y\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)$; $b_y(x, y) = x + \dfrac{1}{x}$;
$c_x(x, y) = \operatorname{sen}(x + y) + x\cos(x + y)$; $c_y(x, y) = x\cos(x + y)$;
$d_x(x, y) = yx^{y-1}$; $d_y(x, y) = x^y \ln x$;
$e_x(x, y) = \dfrac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$; $e_y(x, y) = \dfrac{-xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$;
$f_x(x, y) = \dfrac{-2x \operatorname{sen} x^2}{y}$; $f_y(x, y) = \dfrac{-\cos x^2}{y^2}$.

8. $c_x(x,y) = \dfrac{x^2+4xy+y^2}{(x+2y)^2}$; $c_y(x,y) = \dfrac{-2(x^2+xy+y^2)}{(x+2y)^2}$;
$c_{xx}(x,y) = \dfrac{6y^2}{(x+2y)^3}$; $c_{yy}(x,y) = \dfrac{6x^2}{(x+2y)^3}$; $c_{xy}(x,y) = c_{yx}(x,y) = \dfrac{-6xy}{(x+2y)^3}$;
$d_x(x,y) = 2xyg'(x^2y+y^2)$; $d_y(x,y) = (x^2+2y)g'(x^2y+y^2)$;
$d_{xx}(x,y) = 2yg'(x^2y+y^2) + (2xy)^2 g''(x^2y+y^2)$;
$d_{yy}(x,y) = 2g'(x^2y+y^2) + (x^2+2y)^2 g''(x^2y+y^2)$;
$d_{xy}(x,y) = d_{yx}(x,y) = 2xg'(x^2y+y^2) + 2xy(x^2+2y)g''(x^2y+y^2)$;
$e_x(x,y,z) = (\ln y)g'(x\ln y+z^2)$; $e_y(x,y,z) = \dfrac{x}{y}g'(x\ln y+z^2)$;
$e_z(x,y,z) = 2zg'(x\ln y+z^2)$;
$e_{xx}(x,y,z) = (\ln y)^2 g''(x\ln y+z^2)$;
$e_{yy}(x,y,z) = \dfrac{-x}{y^2}g'(x\ln y+z^2) + \dfrac{x^2}{y^2}g''(x\ln y+z^2)$;
$e_{zz}(x,y,z) = 2g'(x\ln y+z^2) + 4z^2 g''(x\ln y+z^2)$;
$e_{xy}(x,y,z) = e_{yx}(x,y,z) = \dfrac{1}{y}g'(x\ln y+z^2) + \dfrac{x\ln y}{y}g''(x\ln y+z^2)$;
$e_{xz}(x,y,z) = e_{zx}(x,y,z) = 2z\ln y g''(x\ln y+z^2)$;
$e_{yz}(x,y,z) = e_{zy}(x,y,z) = \dfrac{2zx}{y}g''(x\ln y+z^2)$.

9. (a) $\nabla u(x,y,z) = \left(\dfrac{\operatorname{sen} x\cos x}{u(x,y,z)}, \dfrac{\operatorname{sen} y\cos y}{u(x,y,z)}, \dfrac{\operatorname{sen} z\cos z}{u(x,y,z)}\right)$;
(b) $\nabla u(x,y,z) = \left(\dfrac{1}{x+y}, \dfrac{1}{x+y}, 0\right)$.

10. $f_x(x,y) = 2x\operatorname{tg}\left(\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\right) - \dfrac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}\left(1+\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\right)\right)$;
$f_y(x,y) = \dfrac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}\left(1+\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\right)\right)$.
Efectivamente la relación $xf_x(x,y)+yf_y(x,y) = 2f(x,y)$ es cierta para cualquier $(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

11. $D_vf(0,0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{v_1}{hv_2} = \pm\infty$ si $v_1v_2 \neq 0$.

12. $a'(t) = \left(\dfrac{1}{2t^{1/2}}, \dfrac{1}{2\,(t+2)^{1/2}}\right)$; $b'(t) = \left(1, \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \dfrac{1}{1+t^2}\right)$; $c'(t) = \left(\dfrac{-1}{t^2}, \dfrac{-2}{t^3}, \dfrac{-2t}{(t^2-4)^2}\right)$;
$d'(t) = \left(\dfrac{\ln|t+1| - t/(t+1)}{\ln^2|t+1|}, \dfrac{t\cos t-\operatorname{sen} t}{t^2}, 1\right)$, $t\neq 0,-1$; $d'(0) = \left(\dfrac{1}{2}, 0, 1\right)$;
$e'(t) = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{t}}, \dfrac{1}{t}, \dfrac{-1}{(t-1)^2}\right)$;
$f_x(x,y) = \left(\dfrac{1}{y}, \ln y, \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$; $f_y(x,y) = \left(\dfrac{-x}{y^2}, \dfrac{x}{y}, 1\right)$;

$g_x(x,y,z) = \left(yz\cos xyz, \dfrac{ye^{xy}}{z}, \dfrac{1}{x-y}\right)$; $g_y(x,y,z) = \left(xz\cos xyz, \dfrac{xe^{xy}}{z}, \dfrac{1}{y-x}\right)$;
$g_z(x,y,z) = \left(xy\cos xyz, \dfrac{-e^{xy}}{z^2}, 0\right)$;
$h_x(x,y) = (0,y,1)$; $h_y(x,y) = (0,x,2)$.

13. Para obtener el resultado han de hacerse los siguientes cálculos:
$\alpha'(t) = (1-2t)\,c(t) + \left(t-t^2\right) c'(t)$; $\beta'(t) = b'(t)\cdot c(t) + b(t)\cdot c'(t)$;
$\gamma'(t) = b'(t)\times c(t) + b(t)\times c'(t)$;
$\delta_x(x,y) = f_x(x,y)\cdot h(x,y) + f(x,y)\cdot h_x(x,y)$;
$\delta_y(x,y) = f_y(x,y)\cdot h(x,y) + f(x,y)\cdot h_y(x,y)$;
$\varphi_x(x,y,z) = g(x,y,z) + (x-yz)\,g_x(x,y,z)$;
$\varphi_y(x,y,z) = -zg(x,y,z) + (x-yz)\,g_y(x,y,z)$;
$\varphi_z(x,y,z) = -yg(x,y,z) + (x-yz)\,g_z(x,y,z)$.
Los resultados para las tres primeras derivadas son:
$\alpha'(t) = \left(-1, \dfrac{-1}{t^2}, \dfrac{-t^2+8t-4}{\left(t^2-4\right)^2}\right)$;
$\beta'(t) = \dfrac{1}{t^2\sqrt{1-t^2}} - \dfrac{2\arcsen t}{t^3} + \dfrac{1}{\left(t^2+1\right)\left(t^2-4\right)} - \dfrac{2t\arctg t}{\left(t^2-4\right)^2}$;
$\gamma'(t) = \left(\dfrac{2\arctg t}{t^3} - \dfrac{2t\arcsen t}{\left(t^2-4\right)^2} + \dfrac{1}{\left(t^2-4\right)\sqrt{1-t^2}} - \dfrac{1}{t^2\left(t^2+1\right)},\right.$
$\left.\dfrac{t^2+4}{\left(t^2-4\right)^2} + \dfrac{1}{t\left(t^2+1\right)} - \dfrac{\arctg t}{t^2}, \dfrac{-1+\arcsen t}{t^2} - \dfrac{1}{t\sqrt{1-t^2}}\right)$.

14. Para simplificar la expresión de las soluciones, en las cuatro primeras funciones denotaremos:
$A = (x^2-2xy, y^2-3)$; $B = (\operatorname{sen}(x+2y), xy-x^2)$;
$C = (x^2-y^2, x+2y+3z)$; $D = (x^2+x+1, 2x-1)$;

Los resultados del ejercicio son los siguientes:
$\dfrac{\partial a}{\partial x}(x,y) = (2x-2y)\dfrac{\partial g}{\partial x}(A)$; $\dfrac{\partial a}{\partial y}(x,y) = -2x\dfrac{\partial g}{\partial x}(A) + 2y\dfrac{\partial g}{\partial y}(A)$;
$\dfrac{\partial b}{\partial x}(x,y) = \cos(x+2y)\dfrac{\partial g}{\partial x}(B) + (y-2x)\,\dfrac{\partial g}{\partial y}(B)$;
$\dfrac{\partial b}{\partial y}(x,y) = 2\cos(x+2y)\dfrac{\partial g}{\partial x}(B) + x\dfrac{\partial g}{\partial y}(B)$;
$\dfrac{\partial c}{\partial x}(x,y,z) = 2x\dfrac{\partial g}{\partial x}(C) + \dfrac{\partial g}{\partial y}(C)$;
$\dfrac{\partial c}{\partial y}(x,y,z) = -2y\dfrac{\partial g}{\partial x}(C) + 2\dfrac{\partial g}{\partial y}(C)$;
$\dfrac{\partial c}{\partial z}(x,y,z) = 3\dfrac{\partial g}{\partial z}(C)$;
$d'(x) = (2x+1)\,\dfrac{\partial g}{\partial x}(D) + 2\dfrac{\partial g}{\partial y}(D)$;

$$\frac{\partial e}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{(g(x,y)+h(x,y))^2}\left[\left(g^2(x,y)+2g(x,y)h(x,y)-h^2(x,y)\right)\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)+\right.$$
$$\left.\left(h^2(x,y)+2g(x,y)h(x,y)-g^2(x,y)\right)\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\right];$$
$$\frac{\partial e}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{(g(x,y)+h(x,y))^2}\left[\left(g^2(x,y)+2g(x,y)h(x,y)-h^2(x,y)\right)\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)+\right.$$
$$\left.\left(h^2(x,y)+2g(x,y)h(x,y)-g^2(x,y)\right)\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right];$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \operatorname{sen} g(x,y)\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) + h(x,y)\cos g(x,y)\frac{\partial g}{\partial x}(x,y);$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \operatorname{sen} g(x,y)\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) + h(x,y)\cos g(x,y)\frac{\partial g}{\partial y}(x,y).$$

15. Para simplificar la expresión de las soluciones denotaremos:
$A = (x^2-y, \operatorname{sen} y^2 - z, xyz^2)$; $B = (y \operatorname{sen} x, y\cos x, y)$;
$C = (x+y, x+z, y+z)$; $D = (\operatorname{sen} x, x, \ln x)$.

Los resultados del ejercicio son los siguientes:
$$\frac{\partial a}{\partial x}(x,y,z) = 2x\frac{\partial f}{\partial x}(A) + yz^2\frac{\partial f}{\partial z}(A);$$
$$\frac{\partial a}{\partial y}(x,y,z) = -\frac{\partial f}{\partial x}(A) + 2y\cos y^2\frac{\partial f}{\partial y}(A) + xz^2\frac{\partial f}{\partial z}(A);$$
$$\frac{\partial a}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{\partial f}{\partial y}(A) + 2xyz\frac{\partial f}{\partial z}(A);$$
$$\frac{\partial b}{\partial x}(x,y) = y\cos x\frac{\partial f}{\partial x}(B) - y\operatorname{sen} x\frac{\partial f}{\partial y}(B);$$
$$\frac{\partial b}{\partial y}(x,y) = \operatorname{sen} x\frac{\partial f}{\partial x}(B) + \cos x\frac{\partial f}{\partial y}(B) + \frac{\partial f}{\partial z}(B);$$
$$\frac{\partial c}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(C) + \frac{\partial f}{\partial y}(C);$$
$$\frac{\partial c}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(C) + \frac{\partial f}{\partial z}(C);$$
$$\frac{\partial c}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial y}(C) + \frac{\partial f}{\partial z}(C);$$
$$d'(x) = \cos x\frac{\partial f}{\partial x}(D) + \frac{\partial f}{\partial y}(D) + \frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial z}(D).$$

16. (a) $y'(x) = -x/y$; $y'' = -(x^2+y^2)/y^3 = -16/y^3$.
(b) $y'(x) = \dfrac{\cos x - (1+\operatorname{tg} y)}{x\,(1+\operatorname{tg}^2 y)}$; $y'' = \dfrac{-\operatorname{sen} x - 2\,(1+\operatorname{tg}^2 y)\left(y' + x\,(y')^2 \operatorname{tg} y\right)}{x\,(1+\operatorname{tg}^2 y)}$,
en y'' habrá que sustituir la expresión de y'.
(c) $y'(x) = \dfrac{2x^3+xy^2}{y-x^2y}$;
$$y'' = \frac{4xyy' + 6x^2 + y^2 - (y')^2(1-x^2)}{y\,(1-x^2)} = \frac{(1+2x^2)y^4 + (6x^2-2x^4)y^2 - 4x^6}{(1-x^2)^2y^3}.$$

(d) $y'(x)=\dfrac{(x+y)\,y\cos xy-1}{1-(x+y)\,x\cos xy}$; y'' tiene una expresión complicada.
(e) $y'(x)=\dfrac{-y^2-24x^2-3y}{2xy+3x}$; $y''=\dfrac{-y'\,(4y+6)-48x-2x\,(y')^2}{2xy+3x}$; en y'' habrá que sustituir la expresión de y'.
(f) Similar al apartado (a) .
(g) $y'(x)=\dfrac{e^x\cos y}{1+e^x\operatorname{sen}y}$; $y''=\dfrac{(e^x-e^{3x})\cos y}{(1+e^x\operatorname{sen}y)^3}$.
(h) $y'(x)=-\operatorname{tg}y$; $y''=\operatorname{tg}y\left(1+\operatorname{tg}^2 y\right)$.
La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y=f(x)$ del apartado (a) en el punto $(3,\sqrt{7})$ es $g(x)=\dfrac{-3}{\sqrt{7}}(x-3)+\sqrt{7}$, y de la función $y=f(x)$ del apartado (c) en el punto $(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ es $g(x)=3\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

17. (a) $z_x=\dfrac{24x^2-3y-z^2}{2z\,(x+y^2)}$; $z_y=\dfrac{-3x-2yz^2}{2x+2y^2}$; $z_{xx}=\dfrac{2x+z_x(z-1)}{x+y^2}$;
$z_{yy}=\dfrac{-z^2-2yz_y(1+z)}{2z\,(x+y^2)}$; $z_{xy}=\dfrac{-3-2zz_y-4yzz_x}{2x+2y^2}$; $z_{yx}=\dfrac{-3-4yzz_x-2z_y}{2x+2y^2}$.
(b) $z_x=-x/z$; $z_y=-y/z$; $z_{xx}=\dfrac{-x^2-z^2}{z^3}$; $z_{yy}=\dfrac{-y^2-z^2}{z^3}$; $z_{xy}=z_{yx}=\dfrac{-xy}{z^3}$.
(c) $z_x=-\operatorname{tg}(y+z)$; $z_y=-1$; $z_{xx}=\operatorname{tg}(y+z)\left(1+\operatorname{tg}^2(y+z)\right)$;
$z_{yy}=z_{xy}=z_{yx}=0$.

18. $c=\dfrac{-2-\sqrt{19}}{3}$.

19. No se contradice el teorema de Rolle, pues la función no es derivable en el punto $-3/2\in(-1,-2)$. Por tanto, no puede aplicarse dicho teorema.

20. (a) 2 soluciones como máximo. (b) 2 soluciones como máximo.

21. Hay dos soluciones posibles: $c_1=\sqrt{1-\dfrac{4}{\pi^2}}$, $c_2=-\sqrt{1-\dfrac{4}{\pi^2}}$.

22. Se prueba considerando la función $f(t)=\operatorname{sen}t$ en el intervalo $[y,x]$.

23. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}=\dfrac{1}{2}$; $\quad\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\operatorname{sen}x}{x+\operatorname{sen}x}$ no existe;
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}=1$; $\quad\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{1/x}}{\ln x}=-\infty$;
$\lim\limits_{x\to0}x^x=1$; $\quad\lim\limits_{x\to0}xe^{1/x}$ no existe;
$\lim\limits_{x\to1}(x-1)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}=\dfrac{-2}{\pi}$; $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x+\ln x}=+\infty$;
$\lim\limits_{x\to1}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x-1}=1$; $\quad\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x\operatorname{sen}x}=1$.

24. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen} xy}{xy} = 1,$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{(\ln y)(\operatorname{tg} x)}{x(y-1)} = 1.$

25. La función f es continua en $\mathbb{R}-\{2\}$. En el punto $x=2$ la discontinuidad es de salto.

26. a es continua y derivable en $\mathbb{R}$; b es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{0,1\}$; c es continua y derivable en $\mathbb{R}$; d es continua y derivable en $\mathbb{R}$. Las funciones derivadas que nos pide el ejercicio son las siguientes:

$$a'(x) = 2\,|x|,\ x\in\mathbb{R}; \qquad b'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x<0, \\ -1/x^2 & \text{si } 0<x<1, \\ 3x^2-2 & \text{si } x>1; \end{cases}$$

$$c'(x) = \begin{cases} 3x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x} & \text{si } x\neq 0, \\ 0 & \text{si } x=0; \end{cases} \qquad d'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2} & \text{si } x\neq 0, \\ 0 & \text{si } x=0; \end{cases}$$

$$c''(x) = \left(6x - \frac{1}{x}\right)\operatorname{sen}\frac{1}{x} - 4\cos\frac{1}{x},\ x\neq 0; \quad d''(x) = \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right)e^{-1/x^2},\ x>0.$$

$c''(0)$ no existe. La discontinuidad de b en el punto 0 es esencial.

27. $\operatorname{Dom} f = \left\{x\in\mathbb{R},\ -1\le x\,|x| - \frac{1}{2}\le 1\right\} = \left[-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$.

La función es derivable en $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, y su expresión es

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x}{\sqrt{1-\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2}} & \text{si } -\sqrt{\dfrac{1}{2}} < x < 0, \\[2ex] \dfrac{2x}{\sqrt{1-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}} & \text{si } 0\le x < \sqrt{\dfrac{3}{2}}. \end{cases}$$

28. La función f es continua en $\mathbb{R}-\{-1\}$. En el punto -1 la discontinuidad es esencial. La función f es derivable en $\mathbb{R}-\{1,-1\}$, y su expresión es

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(x+1)^2} & \text{si } 1<x, \\ \dfrac{-2}{(x+1)^2} & \text{si } -1<x<1, \\ \dfrac{2}{(x+1)^2} & \text{si } x<-1. \end{cases}$$

La función f' es continua y derivable en $\mathbb{R}-\{1,-1\}$. f' tiene una discontinuidad esencial en el punto -1 y de salto en el punto 1. Las discontinuidades de f'' coinciden con las de f'.

29. La función f es continua en $\mathbb{R}$, y derivable en $\mathbb{R}-\{1,-1\}$, su expresión es

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{4x}{(x^2+1)^2} & \text{si } x<-1,\\ \dfrac{-4x}{(x^2+1)^2} & \text{si } -1<x<1,\\ \dfrac{4x}{(x^2+1)^2} & \text{si } 1<x.\end{cases}$$

La función f' es continua en $\mathbb{R}-\{1,-1\}$. f' tiene en los puntos 1 y -1 discontinuidades de salto.

30. La función f es continua en $[-1,1)\cup(1,3]$. Para que sea continua en $[-1,3]$ se tendrá que definir $f(1)=4/9$, que es el límite de la función en el punto 1.

31. La función f es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$. Para que sea continua en $\mathbb{R}$ se tendrá que definir $f(0)=0$, que es el límite de la función en el punto 0.

32. $l(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4e^{\operatorname{sen}c}}{4!}\left(\operatorname{sen}^4c+6\operatorname{sen}^3c+5\operatorname{sen}^2c-5\operatorname{sen}c-3\right)$, con $0<c<x$ ó $x<c<0$.

33. (a) $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\frac{e^cx^{n+1}}{(n+1)!}$, con $0<c<x$ ó $x<c<0$.

(b) $h(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}(x-1)^k}{k}+\frac{(-1)^n(x-1)^{n+1}}{(n+1)\,c^{n+1}}$, con $1<c<x$ ó $x<c<1$.

(c) $k(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(x-1)^k+\frac{(-1)^{n+1}}{c^{n+2}}(x-1)^{n+1}$, con $1<c<x$ ó $x<c<1$.

34. La función a tiene un mínimo tanto local como global en 0 y un máximo global en $-1/2$.

La función b no tiene extremos locales, tiene un mínimo global en -1 y un máximo global en 1.

La función c en $\mathbb{R}$ tiene un mínimo tanto local como global en $-1-\sqrt{2}$ y un máximo tanto local como global en $-1+\sqrt{2}$; c en $[-2,1/2]$ no tiene mínimo local, tiene un mínimo global en -2, y un máximo tanto local como global en $-1+\sqrt{2}$.

La función d en $[0,1)\cup(1,5]$ no tiene extremos ni locales ni globales; d en $[2,4]$ no tiene extremos locales, tiene un máximo global en 2 y un mínimo global en 4.

La función e en $\mathbb{R}$ no tiene extremos globales, tiene un mínimo local en 1 y un máximo local en -1; e en $[-3/2,3]$ tiene un máximo global en 3, y un mínimo tanto local como global en 1.

La función f en $\mathbb{R}$ no tiene mínimos, y presenta un máximo tanto global como local en 0; f en $[-1,2]$ presenta un máximo tanto global como local en 0, tiene un mínimo global en 2 y no tiene mínimos locales.

La función g en $\mathbb{R}$ tiene dos mínimos tanto locales como globales, en 1 y en -1, y un máximo tanto local como global en 0; g en $[-2,+\infty]$ presenta los mismos extremos que en $\mathbb{R}$; g en $(-1,2]$ presenta un máximo tanto local como global en 0, un mínimo local en 1, y dos mínimos globales, en 1 y en -1.
La función h en $\mathbb{R}-\{-1\}$ tiene un mínimo tanto local como global en 1 y no tiene máximos; h en $[1,4]$ no tiene extremos locales, tiene un mínimo global en 1, y un máximo global en 4.
La función i no tiene extremos locales, presenta un máximo global en 2, y un mínimo global en -2.
La función j no tiene extremos locales, no tiene máximo global, y presenta un mínimo global en 0.
La función k no tiene máximos, presenta un mínimo global en 0, y un mínimo local en 1.

35. (a) La función estará acotada por su valor máximo y su valor mínimo, si los tiene (pero si no los tiene también podría ser acotada). Este apartado se responderá con los resultados del siguiente. (b) Máximo global en $\sqrt{2}$, mínimo global en -$\sqrt{2}$.

36. $a=-1/2$, $b=3/2$, $c=d=0$.

37. Solo se puede asegurar la afirmación (b).

38. Solo se puede asegurar la afirmación (c).

42. La capacidad máxima es de 0,5 m^3. El método empleado consiste en tener en cuenta las fórmulas del área y del volumen, y expresar esta última como función de una sola variable para posteriormente obtener su máximo global.

43. (a) La empresa debe producir semanalmente 2000 kg para obtener beneficios máximos (que serán de 1775255,13 euros).
(b) La empresa sufrirá perdidas mayores en el caso de producir 30,33 kg, que supondría unas pérdidas de 42893,22 euros.

44. Las dimensiones en función del perímetro P son las siguientes: la base y el largo del rectángulo son respectivamente $4P/(8+3\pi)$ y $(4+\pi)P/(16+6\pi)$.

45. El número exacto de ceros es 1, y se encuentra en el intervalo $(2,3)$.

50. La función a tiene tres ceros, uno en $(-2,-1)$, otro en $(0,1)$ y otro en $(1,2)$. La función b solo tiene un cero y se encuentra en $(0,\pi/2)$. La función c tiene dos ceros y se encuentran en los intervalos $(0,1)$ y $(3,4)$. La función d tiene un cero en $x=0$, otro en el intervalo $(0,\pi/2)$ y otro en $(\pi,3\pi/2)$.

51. La ecuación solo tiene una solución que se encuentra en el intervalo $(-1,0)$. La solución es $x\simeq -0{,}839286755$.

52. (a) La ecuación tiene una única solución. (b) La solución se encuentra en el intervalo $(-2,-1)$. La aproximación a la solución se obtiene tomando en primer lugar (por bisección) $x_1 = -1{,}5$, y las siguientes por el método de Newton-Raphson $x_2 = -1,52173$, $x_3 = -1,5213798$, $x_4 = -1,5213797068045$.

53. (a) $x = 0{,}34729635534$. (b) $x = 0{,}739085133$. (c) $x_1 = 0{,}15859433956$, $x_2 = 3{,}14619322062$. (d) $x_1 = 0$, $x_2 = 1{,}1655611852$, $x_3 = 4{,}6042167772$ (x_3 no se pide pero es interesante; se encuentra en el intervalo $(\pi, 2\pi)$).

54. Para las ocho primeras funciones, el estudio de la concavidad y convexidad se hará en el dominio más ámplio posible.

La función a es convexa en $(-\infty, 1/3) \cup (1,\infty)$, cóncava en $(1/3, 1)$, y sus puntos de inflexión son $1/3$ y 1; la función b es convexa en $(0,\infty)$, cóncava en $(-\infty, 0)$, y su único punto de inflexión es 0; la función c es convexa en $(-2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3}) \cup (1,\infty)$ y cóncava en $(-\infty, -2-\sqrt{3}) \cup (-2+\sqrt{3}, 1)$; por tanto sus puntos de inflexión son tres: $-2-\sqrt{3}$, $-2+\sqrt{3}$ y 1; la función d es convexa en $(-1,0) \cup (1,\infty)$, cóncava en $(-\infty,-1) \cup (0,1)$, y su único punto de inflexión es 0; la función e es convexa en $(0,\infty)$, cóncava en $(-\infty, 0)$, y su único punto de inflexión es 0; la función f es convexa en $(-\infty, -1/\sqrt{3}) \cup (1/\sqrt{3}, \infty)$, cóncava en $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, y sus puntos de inflexión son $-1/\sqrt{3}$ y $1/\sqrt{3}$; la función g es convexa en $(-1, -1/\sqrt{3}) \cup (1/\sqrt{3}, 1)$, cóncava en $(-\infty, -1) \cup (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \cup (1,\infty)$, y sus puntos de inflexión son $-1, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1$; la función h es convexa en $(-\infty,-1) \cup (-1,1)$, cóncava en $(1,\infty)$, y su único punto de inflexión es 1; la función i es convexa en $(0,2)$, cóncava en $(-2,0)$, y su único punto de inflexión es 0; la función j es convexa en $(0,\infty)$, cóncava en $(-\infty,0)$, y no tiene puntos de inflexión; la función k es convexa en $(-3,0) \cup (0,1) \cup (1,2)$, en ningún intervalo es cóncava y, por tanto, no tiene puntos de inflexión.