Fórmulas de Matemáticas ITA 2008/09

Tema 1. Números reales y complejos, y espacio euclídeo

Exponencial compleja

$$e^{a+bi} = e^a \left(\cos b + i \operatorname{sen} b\right)$$

Fórmula de De Moivre

$$z^n = |z|^n \left(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta\right) \quad (\theta = \arg z)$$

Tema 3. Funciones: límites y continuidad

Límites tipo 1^∞

Si $f(x) \to 1$ y $g(x) \to \infty$ cuando $x \to a$ (puede ser $a = \pm\infty$), entonces

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[g(x)(f(x)-1)]}$$

Tema 4. Derivación

Derivada direccional de f en un punto a y en la dirección de un vector unitario u

$$D_u f(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+hu) - f(a)}{h}$$

Si f es de clase C^1 en un entorno de a, entonces $D_u f(a) = \nabla f(a) \cdot u$

Iteración del método de Newton-Raphson

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n \geq 1$$

Tema 5. Integración

Integración por partes

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Integración mediante cambio de variable

$$\int g(f(x))\,f'(x)\,dx = \left[\begin{array}{l} t = f(x) \\ dt = f'(x)\,dx \end{array}\right] = \int g(t)\,dt = G(t) + C = G(f(x)) + C$$

Fórmulas trigonométricas

$$\begin{array}{ll} 1.\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 & 2.\ \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x \\ 3.\ \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x & 4.\ \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2} \end{array}$$

5. $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ 6. $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \dfrac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$

7. $\cos x \cos y = \dfrac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}$ 8. $\operatorname{sen} x \cos y = \dfrac{\operatorname{sen}(x-y)+\operatorname{sen}(x+y)}{2}$.

Integración de funciones trigonométricas

(a) Realizando el cambio $t = \operatorname{tg}(x/2)$:

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\, dt.$$

(b) Realizando el cambio $t = \operatorname{tg} x$:

$$\int R(\operatorname{sen}^2 x, \cos^2 x, \operatorname{tg} x)\, dx = \int R\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}, t\right)\frac{1}{1+t^2}\, dt.$$

Integración por cambio de variable a coordenadas esféricas

$$\iiint_R f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_S \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, f(\rho\cos\theta\operatorname{sen}\phi, \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, \rho\cos\phi)\, d\rho\, d\theta\, d\phi.$$

Método de los trapecios

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right] - \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c).$$

Método de Simpson

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{h}{6}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1/2}) + f(b)\right] - \frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(iv)}(c).$$

Volúmenes y áreas laterales de cuerpos de revolución

Sea f una función continua en un intervalo $[a,b]$. Consideramos el cuerpo de revolución obtenido al girar alrededor del eje x la región determinada por la gráfica de f y el eje x. El volumen de dicho cuerpo es

$$V(f,x,[a,b]) = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Si además f es una función no negativa de clase C^1 en $[a,b]$, entonces el área lateral de la superficie de dicho cuerpo es

$$A_l(f,x,[a,b]) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx.$$

Sea f una función continua y no negativa en un intervalo $[a,b]$, con $a > 0$. Entonces, el volumen del cuerpo de revolución generado al girar la región determinada por la gráfica de f y el eje x en torno al eje y es

$$V(f,y,[a,b]) = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx.$$

Si además f es de clase C^1 en $[a,b]$, entonces el área lateral de la superficie de dicho cuerpo de revolución se obtiene mediante

$$A_l(f,y,[a,b]) = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx.$$

Tema 6. Ecuaciones diferenciales

En lo que sigue, las funciones $a(t)$, $b(t)$ y $c(t)$ de que se trate serán siempre continuas.

Ecuación diferencial lineal de primer orden y ecuación de Bernouilli

La solución de la ecuación diferencial $y' + a(t)y = b(t)$ es

$$y(t) = \left[K + \int b(t)e^{\int a(t)\,dt}dt\right] e^{-\int a(t)\,dt}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Para resolver la ecuación diferencial $y' + a(t)y = b(t)y^{\alpha}$ se realiza el cambio $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden

En este apartado consideraremos las siguientes ecuaciones:

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0. \tag{1}$$

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t). \tag{2}$$

Teorema 1 *Dada $y_1(t) \neq 0$ una solución de* (1)*, sea*

$$y_2(t) = \left[\int \frac{e^{-\int a(t)dt}}{y_1^2(t)}\,dt\right] y_1(t).$$

Entonces, $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (1)*.*

Método de variación de parámetros o de Lagrange

Este método permite obtener una solución particular y_f de la ecuación diferencial (2) a partir de un conjunto fundamental de soluciones $\{y_1, y_2\}$ de (1) de la siguiente forma:

$$y_f(t) = \left[\int \frac{-c(t)y_2(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\,dt\right] y_1(t) + \left[\int \frac{c(t)y_1(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\,dt\right] y_2(t).$$

donde $W(y_1, y_2)(t)$ es el Wronskiano de $\{y_1, y_2\}$.

Método de los coeficientes indeterminados

Para el caso no homogéneo con coeficientes constantes, es decir, para una ecuación del tipo

$$y'' + ay' + by = f(t), \tag{3}$$

supongamos que f es una función de la forma:

$$f(t) = e^{\alpha t}[p_n(t)\cos\beta t + q_m(t)\ \mathrm{sen}\,\beta t],$$

siendo p_n y q_m funciones polinómicas de grados n y m respectivamente. Sea $k = \max(m, n)$ y

$$s = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha + \beta i \text{ no es solución de } r^2 + ar + b = 0, \\ 1 & \text{si } \alpha + \beta i \text{ es una solución simple de } r^2 + ar + b = 0, \\ 2 & \text{si } \alpha + \beta i = \alpha \text{ es una solución doble de } r^2 + ar + b = 0. \end{cases}$$

Entonces, existe una solución particular de la ecuación (3) de la siguiente forma:

$$y_f(t) = t^s e^{\alpha t}[P_k(t)\cos\beta t + Q_k(t)\,\mathrm{sen}\,\beta t],$$

donde P_k y Q_k son polinomios de grado k.

Tema 7. Curvas y superficies

Sea C una curva con parametrización $r\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $n = 2$ ó 3. Entonces:

(a) El vector tangente unitario a C en el punto $r(t)$ es (si existe) $T(t) = \dfrac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$, $t \in [a,b]$.

(b) El vector normal principal a C en el punto $r(t)$ es (si existe) $N(t) = \dfrac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$, $t \in [a,b]$.

(c) La longitud de la curva C es (si r es de clase C^1) $L(C) = \displaystyle\int_a^b \|r'(t)\|\, dt$.

Sea S una superficie con parametrización $s\colon A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Entonces:

(a) Un vector normal a S en un punto $s(u,v)$ es (si existe): $N(u,v) = \dfrac{\partial s}{\partial u}(u,v) \times \dfrac{\partial s}{\partial v}(u,v)$.

(b) El área de S es (si existe la integral): $\text{área}(S) = \displaystyle\iint_A \|N(u,v)\|\, du\, dv$.

Tema 8. Campos escalares y campos vectoriales

Líneas de flujo

Sea F un campo vectorial y a un punto de su dominio. La línea de flujo de F que pasa por el punto a se obtiene resolviendo el siguiente problema de valores iniciales: $r'(t) = F(r(t)), r(0) = a$ (r es una parametrización de la línea de flujo).

Gradiente, rotacional, divergencia y laplaciano

Sean f y F un campo escalar y un campo vectorial, respectivamente, ambos de clase C^1 sobre cierto dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (todo será semejante para $n = 2$, salvo que se indique expresamente). Entonces, para cada $(x,y,z) \in \Omega$ se define:

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)(x,y,z)$$

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \nabla \times F(x,y,z) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)(x,y,z)$$

$$\operatorname{rot} F(x,y) = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)\right) \quad (n = 2)$$

$$\operatorname{div} F(x,y,z) = \nabla \cdot F(x,y,z) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right)(x,y,z)$$

$$\Delta f(x,y,z) = \nabla^2 f(x,y,z) = \operatorname{div}(\nabla f)(x,y,z) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)(x,y,z) \quad (f \in C^2(\Omega))$$

Teorema 2 *Si f y F son de clase C^2, entonces* $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$ *y* $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$.

Integración sobre curvas y superficies

Sean f y F un campo escalar y un campo vectorial, respectivamente, ambos continuos y definidos sobre cierto dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Sea C una curva regular a trozos incluida en Ω, con parametrización $r\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$. Sea S una superficie orientable y suave a trozos incluida en Ω, con parametrización $s\colon A \to \mathbb{R}^3$, siendo A un conjunto conexo de $\mathbb{R}^2$. Entonces se tiene que

$$\int_C f\,dr = \int_a^b f\left(r(t)\right)\|r'(t)\|\,dt, \qquad \int_C F\,dr = \int_a^b F(r(t))\cdot r'(t)\,dt,$$
$$\int_S f\,ds = \iint_A f(s(u,v))\|N(u,v)\|\,du\,dv, \quad \int_S F\,ds = \iint_A F(s(u,v))\cdot N(u,v)\,du\,dv.$$

En el caso de integrales de línea puede ocurrir que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, pero las definiciones son idénticas.

Teorema 3 (de Green) *Sea $F\colon A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1. Sea $R \subset A$ un conjunto conexo, cerrado y acotado tal que su frontera ∂R está formada por una o varias curvas cerradas, simples y regulares a trozos $C_1, C_2, \ldots, C_n$ que no se cortan entre sí, donde C_1 es la "frontera exterior" (orientada en el sentido antihorario por r_1) y $C_2, \ldots, C_n$ son —si las hay— las "fronteras interiores" (orientadas en el sentido horario por $r_2 \ldots, r_n$). Entonces*

$$\int_{\partial R} F\,dr = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} F\,dr_i = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)\right) dx\,dy.$$

Teorema 4 (de Stokes) *Sea F es un campo vectorial de clase C^1 sobre un conjunto conexo y abierto B de $\mathbb{R}^3$. Sea S una superficie contenida en B que sea orientable, suave y simple respecto a cierta parametrización $s\colon A \to \mathbb{R}^3$, que es de clase C^2 en el interior de A. Supongamos que el dominio A de s es un conjunto conexo, cerrado y acotado de $\mathbb{R}^2$ cuya frontera ∂A es una curva cerrada, simple y regular a trozos respecto de cierta parametrización $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$, que la orienta en el sentido antihorario. Si se parametriza ∂S —el borde de la superficie S— mediante la función $r = s \circ f$, entonces se satisface la siguiente igualdad:*

$$\int_{\partial S} F\,dr = \iint_S \operatorname{rot} F\,ds.$$

En general, esta igualdad se satisface siempre que las orientaciones dadas a ∂S y a S por r y s, respectivamente, cumplan la regla del sacacorchos.

Teorema 5 (de Gauss o de la divergencia) *Sea F un campo vectorial de clase C^1 sobre un conjunto conexo, cerrado y acotado V de $\mathbb{R}^3$ cuya frontera ∂V es una superficie cerrada, suave a trozos y orientable. Si ∂V se orienta hacia fuera (hacia el exterior de V), entonces se satisface la siguiente igualdad:*

$$\iint_{\partial V} F\,ds = \iiint_V \operatorname{div} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$