Relación de problemas: Tensores

1. Escribir en notación indicial las siguientes expresiones: a) el producto escalar de dos vectores; b) el módulo de un vector; c) la diferencial de una función de n variables.

2. Notando a los versores î, ĵ y $\hat{k}$ como $\hat{e}_i$ y las variables x, y y z como x_i, exprese indicialmente el gradiente de un escalar y la divergencia de un vector.

3. Demuestre las siguientes afirmaciones: a) $\delta_{ij} \cdot \delta_{ij} = 3$; b) $\epsilon_{ijk} \cdot \epsilon_{ijk} = 6$; c) $\delta_{ij} \cdot v_i = v_j$; d) el determinante de una matriz 3×3 viene dado por $\det A = \epsilon_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3}$; e) las tres componentes del producto vectorial de dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vienen dadas por $(\vec{v} \times \vec{w}) = \epsilon_{ijk} v_j w_k$; f) $\epsilon_{ijk} \cdot \epsilon_{ist} = \delta_{js}\delta_{kt} - \delta_{jt}\delta_{ks}$.

4. Dados el vector $\vec{v}$ y el tensor T:

$$\vec{v} = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right) \qquad\qquad T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

expresados en el sistema S, calcule sus componentes en S sabiendo que los ejes de este último están girados 30^o en torno al eje X_1 y en sentido antihorario.

5. Demuestre que la contracción de un tensor de orden 3 produce un tensor de orden 1, es decir, un vector.

6. Demuestre que el producto contraído de un tensor simétrico por otro antisimétrico es nulo.

7. Sean los vectores $\vec{v} = (1, 0, 2)$ y $\vec{u} = (2, 1, 1)$. Realice: a) su producto tensorial o diádico; b) su producto contraído.

8. Descomponga el tensor T:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Dado el tensor:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

encuentre: a) el traspuesto; b) el adjunto; c) el inverso; d) compruebe que $T^{-1}T = \delta$.

10. Dado el tensor:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

obtenga los versores propios y los invariantes del mismo.

11. Diagonalice el tensor siguiente:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

12. Dado el tensor:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

determine sus valores y vectores propios. Encuentre la matriz de transformación A que aplicada a S lo transforma en su forma diagonal.

13. Sea un elipsoide de semiejes a, b y c. Estudiar en qué se transforma bajo la aplicación del tensor T dado por:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

14. Dado el tensor:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

descompóngase en suma de un tensor simétrico y otro hemisimétrico.

15. a) Encuentre las matrices de giro que provocan una rotación de ϕ radianes alrededor del eje de las X, del eje de las Y y del eje de las Z. b) Demuestre que son ortogonales.

16. Dado el tensor T:

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en el sistema XYZ, encuentre su expresión en el sistema XYZ obtenido después de girar 60^o alrededor del eje X.

17. Hallar los valores y vectores propios de los tensores S, T y U que se dan a continuación así como sus expresiones en el sistema de ejes propios y las matrices de transformación que los convierten en diagonales:

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

18. Dados los vectores:

$$\vec{a} \ = \ 3x\hat{\imath} - 4\hat{k} \qquad\qquad \vec{b} \ = \ 6x^2\hat{\imath} - 3y\hat{\jmath} + \hat{k}$$

determine: a) el producto diádico $\vec{a}\vec{b}$ y su contracción; b) div $\vec{a}$, div $\vec{b}$.

19. Halle los tensores que representan las proyecciones sobre los ejes coordenados de cualquier vector.

20. Aplique el tensor T dado por:

$$T \ = \ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

al vector $\vec{v} \ = \ a\hat{\imath} + a\hat{\jmath} + a\hat{k}$.

21. Demostrar que el campo vectorial dado por $\vec{E} = \vec{r}/r^3$, con $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ tiene divergencia nula en todo punto distinto del origen.